Warszawa, 20 XI 2009

Odpowiedzi do „przykładowych zadań z ekonometrii”

Ćwiczenia: Jakub Growiec

Ad. 1.

Z autokorelacją składnika losowego mamy do czynienia, jeśli $corr(\varepsilon_{t,}\varepsilon_{t+p}) \neq 0$ dla pewnych $p \neq 0$. Jest to sprzeczne z założeniami twierdzenia Gaussa-Markowa, gdzie przyjmuje się, że wszystkie współczynniki autokorelacji składnika losowego są równe zero.

Autokorelacja może występować, o ile w danych pojawia się wymiar czasowy (czyli dla szeregów czasowych oraz danych panelowych). W przypadku danych przekrojowych autokorelacji nie należy się spodziewać (i nie testuje się jej). Powód: w przypadku wymiaru czasowego mamy jednoznacznie określoną kolejność obserwacji w próbie, natomiast w przypadku danych przekrojowych kolejność obserwacji w próbie jest dowolna.

Autokorelację pierwszego rzędu, $corr(\varepsilon_{t,}\varepsilon_{t+1}) \neq 0$, wykrywa się testem Durbina-Watsona. Hipoteza zerowa: brak autokorelacji; hipoteza alternatywna: autokorelacja ujemna lub autokorelacja dodatnia. Testowane hipotezy są w teście DW zawsze jednostronne.

Autokorelację dowolnego rzędu *p* wykrywa się natomiast testem mnożnika Lagrange'a na autokorelację składnika losowego. Dla reszt oryginalnego modelu estymuje się wówczas model pomocniczy $e_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \gamma_1 e_{t-1} + \cdots + \gamma_p e_{t-p} + \omega_t$, a następnie weryfikujemy hipotezę zerową H0: $\gamma_1 = \cdots = \gamma_p = 0$ wobec H1: któraś gamma jest różna od zera. H0 zakłada brak autokorelacji, H1 mówi o występowaniu autokorelacji.

Konsekwencją występowania autokorelacji jest nieefektywność estymatora KMNK oraz obciążenie estymatora wariancji składnika losowego modelu i (co za tym idzie) błędów standardowych oszacowań parametrów. Jeśli w modelu występuje ponadto opóźniona zmienna objaśniana jako objaśniająca, to sam estymator KMNK jest również obciążony i traci zgodność.

Autokorelację eliminujemy albo poprzez lepsze dopasowanie postaci funkcyjnej modelu do omawianego zjawiska, albo przez lepszy dobór zestawu zmiennych objaśniających do modelu, albo poprzez lepszy dobór opóźnień zmiennych objaśniających w modelu. To zależy od przypadku. Jeśli żadna z tych opcji nie działa, można spróbować „mechanicznie” usuwać autokorelację stosując algorytm Cochrane'a-Orcutta lub uogólnioną MNK uwzględniającą autokorelację.

Ad.2.

Na zajęciach poznaliśmy test nieliniowości, uwzględniający kwadraty zmiennych objaśniających, logarytmy zmiennych objaśniających, a także test Ramseya RESET.

Test nieliniowości (kwadraty) wymaga oszacowania modelu pomocniczego dla reszt modelu oryginalnego, postaci $e_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \beta_{k+1} x_{1t}^2 + \cdots + \beta_{2k} x_{kt}^2 + \omega_t$, a następnie przetestowania hipotezy zerowej mówiącej, że pełen zestaw parametrów w modelu pomocniczym jest łącznie nieistotny, wobec hipotezy alternatywnej, że któryś z parametrów różni się istotnie od zera. Odrzucenie H0 sugeruje błędną postać funkcyjną oryginalnego modelu.

Analogicznie, test nieliniowości (logarytmy) wymaga oszacowania modelu pomocniczego dla reszt modelu oryginalnego, postaci $e_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \beta_{k+1} \ln x_{1t} + \cdots + \beta_{2k} \ln x_{kt} + \omega_t$, a następnie przetestowania hipotezy zerowej mówiącej, że pełen zestaw parametrów w modelu pomocniczym jest łącznie nieistotny, wobec hipotezy alternatywnej, że któryś z parametrów różni się istotnie od zera. Odrzucenie H0 sugeruje błędną postać funkcyjną oryginalnego modelu.

Test RESET też jest podobny. Wymaga on oszacowania modelu pomocniczego dla reszt modelu oryginalnego, postaci $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{1t} + \cdots + \beta_k x_{kt} + \beta_{k+1} \hat{y}_t^2 + \beta_{k+2} \hat{y}_t^3 + \omega_t$, a następnie przetestowania hipotezy zerowej mówiącej, że $\beta_{k+1} = \beta_{k+2} = 0$, wobec hipotezy alternatywnej, że któryś z parametrów różni się istotnie od zera. Odrzucenie H0 sugeruje błędną postać funkcyjną oryginalnego modelu.

Konsekwencje oszacowania modelu o niewłaściwej postaci funkcyjnej są następujące:

- Składnik losowy modelu może wykazywać autokorelację i/lub heteroskedastyczność
- Precyzja oszacowań parametrów może być nierówna – większa dla niektórych, mniejsza dla innych.
- Zarówno estymatory parametrów modelu, jak i wariancji składnika losowego będą obciążone. Ze względu na to ostatnie, obciążone mogą być też błędy standardowe oszacowań parametrów modelu, co prowadzi do błędnej decyzji weryfikacyjnej o istotności parametrów.
- Rozkład składnika losowego może być inny niż normalny, przez co zaburzone będzie wnioskowanie statystyczne odnośnie modelu: statystyki „t-Studenta" będą miały inny rozkład niż pożądany rozkład t-Studenta, podobnie statystyki F-Walda, itd.
- Ponieważ interpretacja oszacowań parametrów zawsze dokonywana jest przy założeniu określonej postaci funkcyjnej modelu, to i ona będzie z konieczności błędna.
- Prognozowanie będzie obarczone większym błędem niż wynika to z błędu predykcji ex ante. Błąd ten uwzględnia bowiem tylko zaburzenia stricte losowe oraz niedokładność wyestymowanych parametrów modelu, a nie uwzględnia konsekwencji błędnej postaci funkcyjnej. Na ogół będzie to prowadzić do obciążonych prognoz i/lub systematycznych błędów (np. przeszacowywania prognozowanych wartości).

Ad. 3.

a) Skorygowany $R^2 = 0{,}437$, a więc model nie jest szczególnie dobrze dopasowany do danych.
b) Średni względny błąd szacunku parametru wynosi 0,11/1,49 = 0,076, a więc zaledwie 7,6%. Należy uznać, że parametr przy zmiennej YEARS został oszacowany dokładnie.
c) Statystyka t=13,131 prowadzi do p-value < 0,05, a więc przy poziomie istotności 5% odrzucamy H0 o nieistotności parametru przy zmiennej YEARS na rzecz H1 mówiącej o jego istotności.
d) Tak, przy poziomie istotności 5% występuje heteroskedastyczność. W teście White'a p-value < 0,05.
e) Nie, przy poziomie istotności 5% test Jarque-Bera'y każe stwierdzić, że rozkład składnika losowego nie jest normalny. Dla tego testu jest p-value < 0,05.
f) Nie, mamy do czynienia z danymi przekrojowymi, więc autokorelacja nie będzie problemem. Nie trzeba nawet tego testować.

Ad. 4.

a) Zmienna X_{4t} nie występuje w specyfikacji modelu, gdyż mamy w tym modelu już wyraz wolny oraz pozostałe trzy kwartalne zmienne zero-jedynkowe. Dodatkowe dołączenie X_{4t} spowodowałoby dokładną współliniowość (dla wektorów obserwacji byłoby $X_{1t} + X_{2t}$ $+X_{3t} + X_{4t} = 1$), co z kolei spowodowałoby niemożliwość oszacowania parametrów modelu. Macierz $X^T X$ stałaby się osobliwa. Usunięcie zmiennej X_{4t} sprawia, że to właśnie reprezentowany przez nią kwartał czwarty staje się kwartałem „referencyjnym", względem którego porównujemy poziomy zmiennych w pozostałych kwartałach.
b) $\hat{y}_t = (12{,}5 - 0{,}82) + (2{,}33 + 0{,}82)X_{2t} + (1{,}19 + 0{,}82)X_{3t} + 0{,}82X_{4t} + 2{,}77A_t - 0{,}11B_t$.
c) α_3: w trzecich kwartałach roku wartość sprzedaży marchewki w sklepach „Zielone Żabki" jest średnio o 1,19 jednostki pieniężnej wyższa niż w kwartałach czwartych (referencyjnych), przy ustalonych nakładach na reklamę i ustalonej wartości sprzedaży buraków.
α_4: wzrost wydatków na reklamę o 1 j.p. spowoduje wzrost wartości sprzedaży marchewki o 2,77 j.p., ceteris paribus.
α_5: wzrost wartości sprzedaży buraków o 1 j.p. spowoduje spadek wartości sprzedaży marchewki o 0,11 j.p., ceteris paribus.
d) Obliczona statystyka *t*=1,19/0,22=5,409. Wartość stablicowana (dla testu dwustronnego) $t_{40-(5+1)}(0{,}05) = 2{,}032$. Mamy więc 5,409>2,032, zatem odrzucamy H0 na rzecz H1. Przy poziomie istotności 5% parametr α_3 statystycznie istotnie różni się od zera.
W przypadku α_5 mamy *t*=-0,11/1,14=-0,096, zatem $|t|$<2,032, czyli brak podstaw do odrzucenia H0 na rzecz H1. Przy poziomie istotności 5% parametr α_5 jest nieistotny.
e) Uwaga, błąd w zadaniu. Nie mamy dostatecznych informacji, aby policzyć błędy prognozy *ex ante*, a więc nie da się też sformułować prognoz przedziałowych.
Skoro okres nr 41 jest pierwszym kwartałem roku, prognozy punktowe są natomiast następujące: $y_{41}^P = 12{,}5 - 0{,}82 + 2{,}77 * 10{,}2 - 0{,}11 * 4{,}4 = 39{,}45;$ analogicznie $y_{42}^P = 43{,}75;$ $y_{43}^P = 37{,}66; y_{44}^P = 34{,}38; y_{45}^P = 37{,}29.$

f) Błędy prognozy *ex post*: 1,75; -0,65; 0,54; 0,72; -3,99. Błąd absolutny jest największy w okresie ostatnim (*t*=45).
RMSE=0,899; MAE=1,531; MAPE=0,042 [4,2%]; Współczynnik Theila=0,0027.

g) DW=1,13. Z tablic dla n=40 oraz k=5 mamy dL(0,05)=1,23 oraz dU(0,05)=1,79. Skoro 1,13<1,23, to odrzucamy H0 o braku autokorelacji składnika losowego na rzecz H1 o autokorelacji dodatniej.

h) Z tablic mamy $F_{5,34}(0{,}01) = 3{,}61$. Zatem 342,17>3,61 czyli odrzucamy H0 o łącznej nieistotności zestawu parametrów na rzecz H1 o ich łącznej istotności.

Ad.5.

a) Tak, ponieważ udowodniliśmy, że istnieje kombinacja liniowa obniżająca rząd integracji oryginalnych zmiennych. Oryginalne zmienne są zintegrowane stopnia 1, a ich kombinacja liniowa – stopnia 0.

b) Wektor kointegrujący to [1, -0,41]. W długookresowej równowadze kombinacja liniowa oryginalnych zmiennych postaci $y_t - 0{,}41x_t$ jest stała.

c) Model ECM: $\Delta y_t = \alpha \Delta x_t + \beta(y_{t-1} - 0{,}41x_{t-1}) + \varepsilon_t$.

d) Interpretacja parametrów. α mierzy siłę bezpośredniego wpływu zmian w zmiennej *x* na zmiany w zmiennej *y*, czyli mówi, o ile jednostek wzrośnie natychmiast *y*, jeśli *x* wzrośnie o 1 jednostkę. β mierzy natomiast siłę działania mechanizmu korekty błędem, czyli powrotu zmiennej *y* do długookresowej równowagi w relacji z *x*.
Żeby był to poprawnie wyspecyfikowany model ECM, w którym faktycznie funkcjonuje mechanizm korekty błędem, musi zachodzić nierówność $\beta \in < -1{,}0)$. Dla dodatnich wartości β odchylenia od długookresowej równowagi ulegałyby bowiem rozdmuchaniu zamiast wygasać. Dla $\beta < -1$, reakcja na odchylenia byłaby więcej niż proporcjonalna, co prowadziłoby do wybuchowych oscylacji modelu.

e) Procedura Engle'a-Grangera działa następująco:
   1. Estymujemy KMNK model dla oryginalnych zmiennych, niestacjonarnych, ale zintegrowanych w tym samym stopniu. Zapisujemy reszty z tego modelu.
   2. Przeprowadzamy dla tych reszt test ADF. Opóźnienia testu ADF dobieramy tak, żeby uwzględnić ich autokorelację – najlepiej to zbadać za pomocą spojrzenia na funkcję autokorelacji cząstkowej PACF.
   3. Jeśli test ADF pozwala odrzucić H0 o występowaniu pierwiastka jednostkowego (implikującego niestacjonarność) na rzecz H1 o braku pierwiastka jednostkowego (stacjonarność), to stwierdzamy, że oryginalne zmienne są skointegrowane.
   4. Jeśli oryginalne zmienne były zintegrowane w stopniu wyższym niż 1, niech będzie, że w stopniu *p*, wtedy możemy też, obliczając kolejne przyrosty, zbadać, czy reszty z punktu pierwszego są zintegrowane w stopniu 1,2, …, *p*-1. Jeśli tak, to również stwierdzamy kointegrację oryginalnych zmiennych: jeśli zmienne są zintegrowane w stopniu *p,* a ich kombinacja liniowa jest zintegrowana w stopniu *m*<*p,* to mówimy, że zmienne te są skointegrowane rzędu *p*-*m*.