

Ciągi liczbowe – własności i granica

Własności ciągów

1. Niech $a_n = -2n - 3$ dla $n = 1, 2, \dots$. Sprawdzić, czy (a_n) jest ciągiem monotonicznym, ograniczonym, arytmetycznym.

2. Dla następujących ciągów napisać ogólny wyraz:

a) $2, \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots$; b) $\frac{1}{3}, 2, \frac{3}{5}, 4, \frac{5}{7}, 6, \dots$; c) $\frac{2}{4}, -\frac{5}{8}, \frac{8}{12}, -\frac{11}{16}, \dots$.

3. Sprawdzić czy następujący ciąg jest ciągiem geometrycznym

a) $a_n = \left(\frac{3}{5}\right)^n$, b) $a_n = \frac{n!}{2^n}$, c) $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Dla ciągu geometrycznego obliczyć sumę S_{10} .

4. Czy następujący ciąg jest ciągiem arytmetycznym

a) $a_n = 2n + 7$, b) $a_n = \frac{2^n}{n!}$, c) $a_n = 7 - 3n$.

Dla ciągu arytmetycznego obliczyć sumę S_{10} .

5. Niech $a_n = 3 \cdot 2^n - 1$ dla $n = 1, 2, \dots$. Sprawdzić, czy:

a) $a_2 = 10$,

b) $a_{n+1} = 6 \cdot 2^n - 1$ dla $n = 1, 2, \dots$

c) ciąg (a_n) jest rosnący.

6. Niech $a_n = 2n - 6^n + \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Sprawdzić, czy

a) $a_2 > -32$,

b) ciąg a_n jest malejący,

c) ciąg a_n jest ograniczony z góry.

7. Niech $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n + 4^n}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Sprawdzić, czy spełnione ciąg (a_n) jest monotoniczny i

czy jego wyrazy spełniają warunek $-\frac{1}{20} \leq a_n \leq \frac{1}{6}$.

8. Ciąg a_n ma wyraz ogólny dany wzorem $\sqrt[n]{n+3}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Zbadać, czy jest to ciąg arytmetyczny.

*9. Niech $a_n = \frac{5^{2n} - 2^{2n}}{5^n + 2^n}$ dla $n = 1, 2, \dots$. Wykazać, że $a_n = 5^n - 2^n$ oraz sprawdzić, czy (a_n)

jest ciągiem geometrycznym i czy jest monotoniczny.

*10. Ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym takim, że $a_1 = 2$ oraz $a_2 - a_1 = -3$. Wykazać, że jest on ciągiem malejącym, a ponadto:

a) $a_n = -3n + 5$,

b) $a_{n+2} = a_n - 6$ dla $n = 1, 2, \dots$

*11. Ciąg (a_n) jest ciągiem geometrycznym takim, że $a_1 = 2$ oraz $q = -\frac{1}{2}$. Wyznaczyć wzór ogólny tego ciągu oraz wykazać, że $a_{n+2} = \frac{1}{4}a_n$ dla $n = 1, 2, \dots$.

Granica ciągu

Obliczyć granicę ciągu (a_n) , jeśli:

1. $a_n = \frac{n^2 + 3n + 2}{2n^2 + 5n}$

2. $a_n = \frac{-2n^3 - 3n^2 + 7}{4n^2 + 8n + 3}$

3. $a_n = \frac{5n^4 - 6n^2 + 7n + 3}{n^3 + 9n + 6 + 8}$

4. $a_n = \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+2)^4 + (n-2)^4}$

5. $a_n = \frac{4(n-1)(n^2+3)\sqrt{2n}}{\sqrt{4n^3+7n+2(n^2-8)}}$

6. $a_n = \frac{n(n^2+5)\sqrt[3]{n}}{(n^2+1)\sqrt{n^3+5(n+3)}}$

7. $a_n = \sqrt{4n^2+3n} - 2n$

8. $a_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^3} \right)^2$

9. $a_n = \frac{7^n - 4^{2n}}{5^n}$

10. $a_n = \frac{2n-1}{3^n n}$

Zadania przygotował Prof. S. Dorosiewicz z zespołem.

11. $a_n = \sqrt[3]{1+2^n}$

12. $a_n = 2^{\frac{n^3+n^2}{2n+5}}$

13. $a_n = \left(\frac{1}{3} \right)^{\frac{n^2+3}{-2n^2+5n+1}}$

14. $a_n = 5^{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}$

15. $a_n = \left(\frac{n+2}{n} \right)^n$

$$16. a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+5}$$

$$17. a_n = \left(\frac{n}{n+3}\right)^{n-1}$$

$$18. a_n = \left(1 + \frac{3}{n+2}\right)^{-n-2}$$

$$19. a_n = \left(\frac{n+7}{n+3}\right)^{2n+1}$$

$$*20. a_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n+3}$$

$$*21. a_n = \sqrt{\left(\frac{n^3 - n}{n^2(n+1)}\right)^n}$$