

## Zadania nr 6 do MATEMATYKI 75. Ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych

1. Narysować warstwicę funkcji  $f$  dla podanych wartości  $c$ :

- $f(x, y) = 2x + 5$ ;  $c = -1, c = 1, c = 3$ ;
- $f(x, y) = -3x + y + 7$ ;  $c = 0, c = 2, c = -2$ ;
- $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ;  $c = -3, c = -1, c = 3, c = 8$ ;
- $f(x, y) = e^{x^2+y^2-2x+4y}$ ;  $c = 1, c = e, c = \frac{1}{e^3}$ ;
- $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ , dla  $x \neq y$ ;  $c = 1, c = 0, c = -2$ ;
- $f(x, y) = ye^{-x} + 3$ ;  $c = -1, c = 3, c = 4$ ;
- $f(x, y) = |x + 3| + |y - 1|$ ;  $c \geq 0$ ;
- $f(x, y) = \max\{|x|, |y|\}$ ;  $c \geq 0$ ;
- $f(x, y) = \ln\left(\frac{1-x+y}{x^2+y^2}\right)$ , dla  $0 < x - y < 1$ ;  $c \geq 0$ .

2. Wyznaczyć, korzystając z warstwic, najmniejszą i największą wartość funkcji  $f$  na zbiorze  $X$ , jeśli:

- $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ ,  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2|x| + |y| \leq 2\}$ ;
- $f(x, y) = x - y$ ,  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \leq 1\}$ ;
- $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ ,  $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 4\}$ .

3. Sprawdzić, czy funkcja  $f(x, y) = 3x^3 + 3x^2y - y^3 - 15x$  ma ekstrema lokalne w punktach  $P_1(1, -1)$ ,  $P_2(1, 1)$ ,  $P_3(\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ .

4. Wyznaczyć (o ile istnieją) ekstrema lokalne funkcji:

- $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 10x - 8y - 5$ ;
- $f(x, y) = 3x^2 + 3xy - y^2 - 15x$ ;
- $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 6xy$ ;
- $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ ;
- $f(x, y) = x^2 + y^4 - 2xy + 1$ ;
- $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy + 2$ ;
- $f(x, y) = x^3 + y^2 - 6xy - 48x$ ;
- $f(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;
- $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ;
- $f(x, y) = (1 + e^x) \cos y - xe^x$ ;
- $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ , gdzie  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

5. Liczbę  $a > 0$  zapisać w postaci sumy 3 liczb, których iloczyn jest maksymalny.

6. Firma produkuje dwa wyroby w warunkach doskonałej konkurencji. Ceny produkowanych wyrobów wynoszą odpowiednio  $P_1$  i  $P_2$ . Oznaczmy przez  $Q_1$  i  $Q_2$  poziomy produkcji wyrobu pierwszego i drugiego. Zakładamy, że funkcja kosztów całkowitych rozważanej firmy ma postać  $C(Q_1, Q_2) = Q_1^2 + Q_1Q_2 + Q_2^2$ . Wyznaczyć poziomy produkcji przy których zysk firmy jest maksymalny.

7. Załóżmy, że firma rozważana w poprzednim zadaniu jest teraz monopolistą na rynku. Oznacza to, że ceny obu produktów zależą od wielkości produkcji. Przyjmujemy, że funkcje popytu z jakimi styka się monopolista są następujące:

$$Q_1(P_1, P_2) = 40 - 2P_1 + P_2, \quad Q_2(P_1, P_2) = 15 + P_1 - P_2.$$

Funkcja kosztów całkowitych jest taka sama jak poprzednio. Wyznaczyć poziomy produkcji maksymalizujące zysk firmy.

8. Wyznaczyć i zinterpretować elastyczności cząstkowe funkcji w podanych punktach:

a)  $f(x, y) = 5x + 2y + 3$ ,  $P(4, 10)$ ;

b)  $f(x, y) = x \ln y$ ,  $P(2, e)$ ;

c)  $f(x, y) = 9K^{1/4}L^{3/4}$ ,  $P(k, l)$ .

9. Oszacowana funkcja produkcji przedsiębiorstwa ma postać

$$Y = 6K^{3/2}L^{1/2},$$

gdzie  $Y$  oznacza wielkość produkcji,  $K$  – wartość majątku produkcyjnego,  $L$  – zatrudnienie.

W pewnym okresie otrzymano wartości:  $K=50$ ,  $L=400$ .

a) Jaka była w tym okresie elastyczność produkcji przedsiębiorstwa względem: 1) majątku produkcyjnego? 2) zatrudnienia?

b) Planuje się na koniec okresu zmniejszenie zatrudnienia o 10%. Jaki wzrost majątku produkcyjnego pozwoliłby utrzymać wielkość produkcji na niezmiennym poziomie?

10. Popyt zewnętrzny na eksport ( $X$ ) zależy od dochodu za granicą ( $Y$ ) i średniego poziomu cen ( $P$ ):

$$X = Y^{1/2} + P^{-2}.$$

Znaleźć elastyczność cząstkową zagranicznego popytu na eksport względem poziomu cen.