

To kolejny zestaw zadań do ćwiczeń nr. 4. Mam nadzieję, że tym razem dotrze do wszystkich na czas. Pozdrawiam- W. Marcinkowska

Zadania 2 do matematyki 75h.

Funkcje, wykresy, podstawowe własności, granica i ciągłość.

1. W układzie współrzędnych O_{xy} narysować wykresy funkcji

$$f(x) = |x - 2| - 2 \quad \text{oraz} \quad g(x) = ||x - 2| - 2|, \quad x \in \mathbb{R}$$

a następnie wyznaczyć

- punkty, w których każda z funkcji ma ekstrema.
- obrazy $f(A)$ i $g(A)$, jeśli $A = (-4; 2)$
- przeciwoobrazy $f^{-1}(B)$ i $g^{-1}(B)$, jeśli $B = (-1; 1)$.

2. W układzie współrzędnych O_{xy} narysować wykresy funkcji

$$f(x) = 3 - |x^2 - 9| \quad \text{oraz} \quad g(x) = e^{x-1} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

a następnie

- wyznaczyć punkty, w których każda z funkcji ma ekstrema.
- dla każdej z tych funkcji wyznaczyć przedziały, w których funkcji jest rosnąca,
- zbadać różnowartościowość każdej z tych funkcji.

3. W tym samym układzie współrzędnych O_{xy} narysować wykresy trzech funkcji określonych wzorami

$$f(x) = |4 - x^2|, \quad g(x) = |4x - x^2| \quad \text{i} \quad h(x) = 4|x| - x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

Wyznaczyć zbiory

- $Z = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \leq g(x)\}$
- $T = \{x \in \mathbb{R}: g(x) = h(x)\}$
- $U = \{x \in \mathbb{R}: h(x) \leq f(x)\}$

4. Dla $f(x)$, podać wykres, określić zbiór wartości oraz wyznaczyć zbiór $X = \{x \in \mathbb{R}: f(x) \geq 0\}$, jeśli

a) $f(x) = 2^{-|x-1|}$,

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2)$,

c) $f(x) = \ln |1 - x|$

5. Wiadomo, że

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{x \rightarrow a} k(x) = -4,$$

Wyznaczyć, o ile to możliwe następujące granice;

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x) - k(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{k(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{h(x)}{f(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{h(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{k(x)}$$

6. Obliczyć granice:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x|x|}, \quad \lim_{x \rightarrow 3} 2^{x-3}, \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{e}{(e-x)^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln|x+1|$$

7. Dla podanych funkcji wyznaczyć dziedzinę oraz granice na wszystkich końcach przedziałów określoności

a) $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-1}$ b) $g(x) = e^{\frac{1}{4-x^2}}$ c) $h(x) = \sqrt{\frac{4}{9-x^2}}$ d) $k(x) = \frac{1}{\ln(x(x+e))}$

8. W zależności od wartości parametru β , gdzie $\beta \in \mathbb{R}$, wyznacz wartość granicy lub granic jednostronnych funkcji

a) $\lim_{x \rightarrow \beta^+} \frac{\beta}{\beta - x}$, b) $\lim_{x \rightarrow \beta} \frac{\beta}{\beta^2 - x^2}$, c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 - \beta} \right)^x$

9. Narysować wykres funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \in (1; +\infty) \\ x(x-1) & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$$

a) Określić przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji $f(x)$.

b) Wyznaczyć zbiór $D = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (0; 1)\}$

10. Stosując definicję ciągłości funkcji, zbadać ciągłość

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{dla } x \in (-\infty; 1) \\ x^2 - 1 & \text{dla } x \in (1; +\infty) \\ x(x-1) & \text{dla } x \in (-\infty; 0) \end{cases}$$

11. W układzie współrzędnych O_{xy} narysować przykładowy wykres funkcji $f(x)$, która jest ciągła w $\mathbb{R} - \{0\}$ oraz spełnia następujące warunki:

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad i \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \infty \quad i \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad i \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

c) Ile najmniej miejsc zerowych musi mieć funkcja $f(x)$ w każdym z przypadków a) i b)?

12. Zbadać ciągłość funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 0$, jeśli $f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{dla } x \leq 0 \\ 1 + \sqrt{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$

13. Zbadać ciągłość funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 0$, jeśli $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$

14. Dla jakiej wartości parametru α , gdzie $\alpha \in \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w \mathbb{R} , jeśli

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{e}\right)^{x-3} & \text{dla } x \leq 3 \\ \sqrt{\alpha x - 3} & \text{dla } x > 3 \end{cases}$$

Po ustaleniu wartości parametru α narysować wykres tej funkcji a następnie wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji f .

15. Dla jakiej wartości parametru θ , gdzie $\theta \in \mathbb{R}$, funkcja f jest ciągła w \mathbb{R} , jeśli

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2-x} & \text{dla } x < 0 \text{ lub } x > 4 \\ \theta x + \frac{1}{2} & \text{dla } 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Po ustaleniu wartości parametru θ narysować wykres tej funkcji a następnie wyznaczyć przedziały monotoniczności i ekstrema funkcji f .

16. Jedną z własności funkcji ciągłych:

Funkcja określona na przedziale $\langle a; b \rangle$ i ciągła na tym przedziale

przyjmuje wszystkie pośrednie wartości pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$.

Na podstawie tej własności oraz przy zastosowaniu do obliczeń arkusza kalkulacyjnego, np. EXCEL, wyznaczyć z dokładnością do $\varepsilon = 0,00001$ wartość rozwiązania równania

a) $x^3 - 5x^2 + 100 = 0$

b) $x^5 + 1000x + 1 = 0$

17. Wyznaczyć asymptoty pionowe i poziome wykresu funkcji określonej wzorem:

a) $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

b) $g(x) = 2x - \frac{2}{x}$

c) $h(x) = \left(\frac{1}{e+1}\right)^x$

d) $k(x) = \sqrt{\frac{2}{x^2-1}}$