Zadania nr 8   Matematyka 75   Macierze, działania na macierzach

1. Wykonać wskazane działania na macierzach A, B, C i D w celu wyznaczenia elementów macierzy X lub uzasadnić, że macierz X nie istnieje, jeśli:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 12 \\ -4 & 6 & -8 \end{bmatrix}$$

oraz

a) $X = AA^T + C$ c) $X = B^TC + 2DA$ e) $X = B^TB - DD^T$

b) $X = \left(\frac{1}{2}BD - 4C\right)A$ d) $X = B^TC(\frac{1}{4}D^T)$ f) $X = A^TC + CA$

2. Dana jest macierz A o wymiarach 4×5 i o elementach a_{ij} $(i = 1,2,3,4,\ j = 1,2,3,4,5)$, których wartości są następujące:

$$A = \begin{bmatrix} -12 & 0 & 4 & 10 & 3 \\ -2 & 1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 2 \\ 15 & 3 & -9 & 6 & -2 \end{bmatrix}$$

Wyznaczyć opisane w podpunktach sumy.

a) $S = \sum_{i=1}^{4}(2a_{i3} - 3a_{i4})$ b) $S = \sum_{j=1}^{4}(a_{4j} + 3a_{3j})$ c) $S = \sum_{t=1}^{4} a_{2t}a_{t3}$

3. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \text{ oraz } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Uprościć wzory określające macierz X, a następnie wyznaczyć w każdym przypadku elementy tej macierz, jeśli:

a) $X = B(B^{-1}A - 3A^T)$ c) $(I + X + 3A)^T = B(B^{-1} - I)$

b) $X = (BA^{-1} - 2B^T)A$ d) $(X + A^TB)B^{-1} = I + A^T$

4. Wykonać mnożenie macierzy.

a) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & a \end{bmatrix}$

b) $\left(\begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{bmatrix}\right)^3$

Uwaga. $A^3 = A \cdot A \cdot A$, ogólnie $A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$ (n-krotnie)

c) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & -b & d \\ -d & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & -b & d \\ -d & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. Wykonać mnożenie macierzy.

a) $\begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & w \\ p & r & s \\ k & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & w \\ p & r & s \\ k & l & m \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y & z \\ t & u & w \\ p & r & s \\ k & l & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

6. Posługując się przykładem konkretnej macierzy o wymiarach 4×2 i znanych elementach liczbowych, podać ilustrację twierdzenia:

Dla dowolnej macierzy A macierze $X = A^T A$ oraz $Y = AA^T$ są macierzami symetrycznymi.

7. Posługując się przykładem dwóch konkretnych macierzy trzeciego stopnia, podać ilustrację twierdzenia:

Jeżeli macierze A i B są kwadratowe tego samego stopnia oraz jeżeli są to macierze trójkątne górne, to $X = AB$ też jest macierzą trójkątną górną.

8. Posługując się przykładem dwóch konkretnych macierzy tego samego stopnia, zilustrować twierdzenie:

Iloczyn macierzy diagonalnych tego samego stopnia jest macierzą diagonalną.

9. Niech $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}, \mathrm{B} = \frac{1}{\mathrm{ad-cb}} \begin{bmatrix} \mathrm{d} & -\mathrm{b} \\ -\mathrm{c} & \mathrm{a} \end{bmatrix}$, gdzie $\mathrm{ad} \neq \mathrm{cb}$.

a) Sprawdzić, że przy dowolnych liczbach $\mathrm{a, b, c, d}$, jeśli $\mathrm{ad} \neq \mathrm{cb}$, to $\mathrm{AB} = \mathrm{I}_2$ oraz $\mathrm{BA} = \mathrm{I}_2$.

b) Wyznaczyć macierze $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}^{-1}$ oraz $\begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$ na podstawie punktu (a).

10. Niech *A* stopnia *n* będzie macierzą diagonalną:

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, przy czym $a_{ii} \neq 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Zilustrować na podstawie konkretnych przykładów macierzy trzeciego i czwartego stopnia, że

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

11. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & -1 \\ 4 & 7 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ oraz wektory $\mathbf{b}, \mathbf{v} \in R^3$, gdzie

$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, oraz wektory $\mathbf{d}, \mathbf{x} \in R^4$, gdzie $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$.

Podany poniżej związek zapisać w postaci układu równań.

a) $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$

b) $A^T\mathbf{x} = \mathbf{d}$

c) $x_1k_1 + x_2k_2 + x_3k_3 + x_4k_4 = \mathbf{b}$

d) $xw_1^T + yw_2^T + zw_3^T = \mathbf{d}$

gdzie wektory k_j dla $j = 1, 2, 3, 4$ oraz w_i^T dla $i = 1, 2, 3$ są odpowiednio kolejnymi kolumnami i wierszami macierzy A.

12. Dla każdego z poniższych układów równań liniowych podać jego macierzowy zapis, tj. $Ax = b$, gdzie A jest macierzą o wymiarach $m \times n$, $x \in R^n, b \in R^m$.

a) $\begin{cases} 3x_1 & +7x_2 & & -4x_4 & = & 2 \\ -x_1 & & +8x_3 & +9x_4 & = & 12 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 & -6x_2 & = & -2 \\ -x_1 & +8x_2 & = & 4 \\ 3x_1 & -10x_2 & = & 2 \\ 5x_1 & -22x_2 & = & -2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x_1 & & -12x_3 & = & 0 \\ & -5x_2 & +7x_3 & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & +6x_3 & = & 0 \end{cases}$

przygotowała prof. W. Marcinkowska-Lewandowska z zespołem