Zadania nr 5 do MATEMATYKI 75 Pochodna II-go rzędu. (M. Dędys)

1. Wyznacz pochodną drugiego rzędu funkcji f w punkcie x_0.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x\sqrt{x} + 5$, $x_0 = 4$ (odp. $f''(4) = \frac{61}{4}$)

b) $f(x) = x\ln x$, $x_0 = e$ (odp. $f''(e) = e^{-1}$)

c) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$, $x_0 = 1$ (odp. $f''(1) = 5e^{-1}$).

2.Wyznacz pochodne drugiego rzędu funkcji f oraz przedziały., w których ta funkcja

i) rośnie coraz szybciej;
ii) maleje coraz szybciej;
iii) jest wklęsła;
iv) jest wypukła
gdy

a) $f(x) = x^3 - x$

b) $f(x) = x^n - nx$, $n = 2,3,4...$

c) $f(x) = x^n(1-x)$, $n = 1,2,3,....$

d)* $f(x) = x(1-x)^n$, $n = 1,2,...$

e)* $f(x) = x^n(1-x)^m$, $n, m = 1,2,3.....$

f) $f(x) = x + \sin x$.

3. Wyznacz przedziały wypukłości, wklęsłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji f.

a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ b) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ c) $f(x) = \dfrac{e^x}{x+2}$

d) $f(x) = x^3 e^{-x}$ e) $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

4. Zbadaj tempo zmian funkcji f.

a) $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 4$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$; d) $f(x) = x\ln\dfrac{1}{x^2}$.

5.* Naszkicuj wykres funkcji f.

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$; b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ c) $f(x) = e^{-x^2}$.

6.Zbadaj dla jakich wartości parametrów $\alpha, \beta, \gamma \in R$ funkcja $f(x) = x^\alpha + \beta x + \gamma$ jest wklęsła, a dla jakich wartości jest wypukła w przedziale $(0, \infty)$.

7.Zbadaj, dla jakich wartości parametru $\alpha \in R$ funkcja $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{\alpha x}}$ jest wklęsła, a dla jakich wartości wypukła w przedziale $(0,\infty)$.

8.Zbadaj tempo zmian funkcji $f(x) = \dfrac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$ w zależności od wartości parametru $a \in R$.

9. Dana jest funkcja wielkości produkcji $f(x,y) = \left(3\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2$, gdzie x, y są nakładami na czynniki produkcji. A i B odpowiednio Jeśli nakłady na czynnik A rosną, zaś nakłady na czynnik B pozostają bez zmian, to w jakim tempie zmienia się wielkość produkcji?

10. Kupiec zastanawiając się nad sprzedażą skrzynki wina analizuje aktualną wartość tejże skrzynki w zależności od momentu sprzedaży t oraz stopy dyskontowej r. Funkcja aktualnej wartości dana jest wzorem $f(t,r) = e^{-rt}\sqrt{t+1}$. Określić moment t, w którym, przy ustalonej stopie dyskontowej r obecna wartość skrzynki wina będzie największa ?

11. Wyznacz z definicji pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0), o ile istnieją.

a) $f(x,y) = xy^2 + y$, $(x_0, y_0) = (2,-1)$

b) $f(x,y) = 2y|x|$, $(x_0, y_0) = (0,1)$.

12. Oblicz pochodne cząstkowe I-go rzędu funkcji f po każdej ze zmiennych x oraz y.

a) $f(x,y) = x + 2y^2x + xy$ b) $f(x,y) = x\cos y + \sqrt{y}$ c) $f(x,y) = xe^{2x-y}$

d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ e) $f(x,y) = \sqrt{x^4 - 2xy}$ f) $f(x,y) = \ln(x^2 + 3xy)$.

13. Dane są funkcje różniczkowalne $g: R \to R$ oraz $h: R \to R$. Wyznacz obie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f.

a) $f(x,y) = 3h(x) + g(y)$

b) $f(x,y) = h(x)g(y)$

c) $f(x,y) = h(x)e^{g(x)}$.

14. Dana jest funkcja $f: R^2 \to R$, $f(x,y) = 2x^3y^2 + x^4y + 3y$. Sprawdź, że $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$ dla $(x,y) \in R^2$.

15. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f.

a) $f(x,y) = x^3 + 2y^3x + 3xy + 5$ b) $f(x,y) = \dfrac{y}{x}$ c) $f(x,y) = x^y$

d) $f(x,y) = e^{x^2y}$ e) $f(x,y) = xye^{x+y}$ f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3y}}$.