Zadania do MATEMATYKI 75 Układy równań liniowych

Zadanie 1*

Dla kwadratowej macierzy $A_{m\times n}$ zbudowano macierze blokowe:

$$B=\begin{bmatrix} A & 0 \\ A & I \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} I & A \\ 0 & A^T \end{bmatrix}$$

Wyznacz blokową postać macierzy $B^T, B+C, BC, CB$. Czy $B+C$ jest macierzą symetryczną?

Zadanie 2*

Niech B i C będą macierzami nieosobliwymi. Wyznaczyć postać blokową macierzy A^{-1}, gdzie

a/ $A=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ b/ $A=\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}$.. c/ $A=\begin{bmatrix} I & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$

d/ $A=\begin{bmatrix} C & D \\ 0 & I \end{bmatrix}$.. e/ $A=\begin{bmatrix} B & D \\ 0 & C \end{bmatrix}$ f/ $A=\begin{bmatrix} 0 & C \\ B & D \end{bmatrix}$

Zadanie 3

Dana jest macierz A=$[a_{ij}]_{mxn}$ oraz wektor $\boldsymbol{\lambda_0}=\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$.

- Wyznaczyć wektor **b**=A$\boldsymbol{\lambda_0}$.
- Zapisać macierz **A** w postaci kolumnowej $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{a}_n]$ tj. takiej, że blokami są kolumny macierzy **A** (oznaczone $\boldsymbol{a}_k$, k=1,…,n).
- Wyznaczyć blokową postać iloczynu **A**$\boldsymbol{\lambda_0}$.
- Przedstawić wektor **b** jako kombinację liniową kolumn macierzy **A:**

a/ $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda_0}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$\boldsymbol{\lambda_0}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, c/ $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\lambda_0}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 4

Dany jest układ równań liniowych

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 &= 8 \\ 3x_1+x_2 &= 5 \end{cases} \qquad (*)$$

a/ Wyznacz elementarnie liczby x_1 i x_2. Zapisz macierz rozszerzoną $[\boldsymbol{A} \quad |\boldsymbol{b}]$ tego układu równań. Macierz współczynników tego układu zapisz w postaci kolumnowej $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2]$ (por. Zadanie 3) i w postaci wierszowej $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \end{bmatrix}$ tj. takiej, że blokami są wiersze $\boldsymbol{a}^1$ i $\boldsymbol{a}^2$ macierzy **A**.

b/ Wykorzystując blokowa postać iloczynu $\mathbf{Ax}_0 = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, gdzie wektor $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ jest wektorem kolumnowym, przedstawić wektor **b** jako kombinację liniową kolumn $\boldsymbol{a}_1$ oraz $\boldsymbol{a}_2$ macierzy A. Zilustrować układ równań (*) w przestrzeni liniowej wektorów kolumnowych R^2.

c/ Wykorzystując iloczyn skalarny wektorów w przestrzeni liniowej wektorów wierszowych R^2, zapisz układ (*) jako

$$\begin{cases} (a^1|x^0) &= & 8 \\ (a^2|x^0) &= & 5 \end{cases}, \text{ gdzie } x^0=[x_1, x_2].$$

Zilustruj układ równań (*) w przestrzeni liniowej wektorów wierszowych $\mathbf{R^2}$.

Zadanie 5

Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Niech $A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}^1 \\ \boldsymbol{a}^2 \\ \boldsymbol{a}^3 \end{bmatrix}$ oraz $A = [\boldsymbol{a}_1 \quad \boldsymbol{a}_2 \quad \boldsymbol{a}_3 \quad \boldsymbol{a}_4]$ będą odpowiednio postacią wierszową postacią kolumnową macierzy A.

a/ Stosując operacje elementarne na wierszach macierzy A sprowadzić tę macierz do postaci bazowej względem kolumn I, II oraz III.

Odp. $A \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

b/ Przedstawić wektor $\boldsymbol{a}_4$ jak kombinację liniową wektorów $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$.

c/ Ile wynosi dim L($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$). Czy zachodzi równość L($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$)= L($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$)? Czy L($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$)=$\mathbf{R}^3$?

d/ Ile wynosi dim L($\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$)?

e/ Ile wynosi rząd macierzy A?

Zadanie 6.

Stosując operacje elementarne na wierszach macierzy rozszerzonej $[\boldsymbol{A} \quad |\boldsymbol{b}]$ wyznaczyć rozwiązanie ogólne układu jednorodnego. Przedstawić zbiór rozwiązań X(0) jako przestrzeń liniową o danym układzie generatorów.

a/ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 &= & 0 \\ 3x_2 + x_3 &= & 0 \end{cases}$,

b/ $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 &= & 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 &= & 0 \end{cases}$,

c/ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 &= & 0 \\ 5x_2 + x_3 &= & 0 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= & 0 \end{cases}$

d/ $\begin{cases} x_1 + x_2 &= & 0 \\ x_2 + x_3 &= & 0 \\ x_1 + x_3 &= & 0 \end{cases}$

Zadanie 7

Dany jest niejednorodny układ równań liniowych

- Zapisać macierz rozszerzoną $[\boldsymbol{A} \quad |\boldsymbol{b}]$ tego układu równań.
- Stosując operacje elementarne na wierszach macierzy $[\boldsymbol{A} \quad |\boldsymbol{b}]$ sprowadzić macierz rozszerzoną układu do postaci bazowej.
- Zapisać rozwiązanie ogólne tego układu równań.
- Przedstawić zbiór rozwiązań X(**b**) jako rozmaitość liniową.
- Wyznaczyć wszystkie rozwiązania bazowe danego układu równań wskazać rozwiązania bazowe nieujemne.
- a/ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 & = & -1 \\ 3x_2 + x_3 & = & 4 \end{cases}$, b/ $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 & = & -4 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 & = & 2 \end{cases}$,
- c/ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 & = & -2 \\ 5x_2 + x_3 & = & 6 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 2 \end{cases}$ d/ $\begin{cases} x_1 + x_2 & = & 2 \\ x_2 + x_3 & = & 4 \\ x_1 + x_3 & = & 6 \end{cases}$