

Zadania nr 7 do MATEMATYKI 75

- Dane są wektory $\mathbf{x} = [1, 2]$, $\mathbf{y} = [-1, 1]$ oraz $\mathbf{z} = [3, 3]$. Wyznaczyć poniższe wektory. Podać interpretację geometryczną otrzymanego wyniku.
 - $-3\mathbf{x}$
 - $\mathbf{x} - \mathbf{z}$
 - $\mathbf{x} + 2\mathbf{y} + \frac{1}{3}\mathbf{z}$.
- Dane są wektory $\mathbf{x} = [2, 1, 0]$, $\mathbf{y} = [-2, 0, -1]$ oraz $\mathbf{z} = [1, 1, 1]$. Wyznaczyć poniższe wektory. Podać interpretację geometryczną otrzymanego wyniku.
 - $2\mathbf{x}$
 - $\mathbf{x} - \mathbf{z}$
 - $\mathbf{x} - 2\mathbf{y} + \mathbf{z}$.
- W przestrzeni wektorowej R^4 rozwiązać równanie:
 - $[-1, 0, 2, 3] = \mathbf{x} - [2, 3, -2, 0]$;
 - $2\mathbf{x} = [-2, 4, 0, 1]$;
 - $\mathbf{x} + [0, 2, -3, 0] = [2, -2, 5, 1] - 3\mathbf{x}$.
- Sprawdzić, czy wektor \mathbf{y} jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, gdy:
 - $\mathbf{y} = [1, -4]$, $\mathbf{x}_1 = [1, -2]$, $\mathbf{x}_2 = [-1, 1]$;
 - $\mathbf{y} = [1, -4]$, $\mathbf{x}_1 = [1, -2]$, $\mathbf{x}_2 = [-1, 1]$, $\mathbf{x}_3 = [5, 1]$;
 - $\mathbf{y} = [1, 0]$, $\mathbf{x}_1 = [1, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [a, -1]$, gdzie $a \in R$ jest parametrem;
 - $\mathbf{y} = [2, -2, -3]$, $\mathbf{x}_1 = [-1, 0, 1]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 2, 1]$;
 - $\mathbf{y} = [1, 1, 1]$, $\mathbf{x}_1 = [-1, 0, 1]$, $\mathbf{x}_2 = [0, 2, 1]$;
 - $\mathbf{y} = [6, -5, 4, 1, 1]$, $\mathbf{x}_1 = [-1, 1, 0, 1, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [-1, 1, 0, 1, 0]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 0, 1, 1, 2]$.
- Sprawdzić, czy wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ są liniowo niezależne, gdy:
 - $\mathbf{x}_1 = [1, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [-3, -6]$;
 - $\mathbf{x}_1 = [1, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [-1, 3]$;
 - $\mathbf{x}_1 = [1, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [-1, 3]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 1]$;
 - $\mathbf{x}_1 = [1, -1]$, $\mathbf{x}_2 = [-1, a]$, gdzie $a \in R$ jest parametrem;
 - $\mathbf{x}_1 = [1, 1, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [-1, 0, 2]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 1, -1]$;
 - $\mathbf{x}_1 = [1, 1, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [-2, -3, 1]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 1, -1]$;
 - $\mathbf{x}_2 = [-3, 1, 0, 1]$, $\mathbf{x}_3 = [0, 0, 1, 2]$, $\mathbf{x}_1 = [-1, 1, 0, 0]$.
- Pokazać, że jeśli wektor \mathbf{y} jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$, to wektory \mathbf{y} , $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ są liniowo zależne.
- Wektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność wektorów:
 - $4\mathbf{z} - 2\mathbf{x}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $2\mathbf{z} - \mathbf{y}$;
 - \mathbf{x} , $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}$.
- Podać interpretację geometryczną zbioru $V = \{\mathbf{x} \in R^2 : \mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{v}, t \in R\}$, gdy:
 - $\mathbf{a} = [0, 0]$, $\mathbf{v} = [2, 1]$;
 - $\mathbf{a} = [0, 3]$, $\mathbf{v} = [2, 1]$;
 - $\mathbf{a} = [2, 4]$, $\mathbf{v} = [2, 1]$;
 - $\mathbf{a} = [-1, -1]$, $\mathbf{v} = [2, 1]$.
- Sprawdzić, czy punkty $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ należą do jednej prostej, gdy:

- a) $\mathbf{x}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [3, 1, -3]$, $\mathbf{x}_3 = [-1, -1, -1]$;
 b) $\mathbf{x}_1 = [1, 0, 2]$, $\mathbf{x}_2 = [3, 1, -3]$, $\mathbf{x}_3 = [2, 1, 2]$;
 c) $\mathbf{x}_1 = [1, 0, -1, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [1, 1, 0, 1]$, $\mathbf{x}_3 = [1, 2, 1, 2]$.

10. Niech $\mathbf{a} = [1, -1, 1]$ oraz $\mathbf{b} = [1, 1, 2]$. Sprawdzić, czy \mathbf{x} należy do

- I. prostej przechodzącej przez punkty \mathbf{a} i \mathbf{b} ;
 II. odcinka o końcach w punktach \mathbf{a} i \mathbf{b} , gdy:

- a) $\mathbf{x} = [1, 2, 0]$, b) $\mathbf{x} = [1, -3, 0]$, c) $\mathbf{x} = [1, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}]$.

11. Dany jest zbiór $V_b = \{\mathbf{x} \in R^3 : x_1 - x_2 + 2x_3 = b\}$ gdzie parametr b jest ustaloną liczbą rzeczywistą oraz $\mathbf{x}_1 = [1, 1, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [-2, 0, 1]$.

- a) Pokazać, że $V_0 = \{\mathbf{x} \in R^3 : \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha, \beta \in R\}$
 i podać interpretację geometryczną zbioru V_0 .
 b) Podać przykład wektora $\mathbf{x}_0 \in V_1$, a następnie uzasadnić, że $\mathbf{x}_0 + \mathbf{y} \in V_1$ dla każdego $\mathbf{y} \in V_0$.
 c) Pokazać, że $V_1 = \{\mathbf{x} \in R^3 : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha, \beta \in R\}$. Podać interpretację geometryczną zbioru V_1 .
 d) Sprawdzić, czy dla dowolnych wektorów jeśli $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in V_1$, to $\mathbf{y} + \mathbf{z} \in V_1$?

12. Dany jest zbiór $V = \{\mathbf{x} \in R^3 : 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 1\}$. Pokazać, że jeśli $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, to

$\{\mathbf{x} \in R^3 : \mathbf{x} = t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b}, t \in <0, 1>\} \subset V$. Podać interpretację geometryczną tego faktu.

13. Dane są zbiory $V = \{\mathbf{x} \in R^3 : x_1 - 2x_3 = 2\}$ oraz $W = \{\mathbf{x} \in R^3 : -x_1 + x_2 + 3x_3 = 3\}$.

- a) Wyznaczyć zbiór $V \cap W$ i podać interpretację geometryczną tego zbioru.
 b) Podać interpretację geometryczną zbioru $V \cap W \cap \{\mathbf{x} \in R^3 : x_2 + x_3 = 5\}$.
 c) Pokazać, że dla każdego $a \in R$ zbiór $V \cap W \cap \{\mathbf{x} \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = a\}$ jest jednoelementowy.

14. Dane są wektory $\mathbf{x}_1 = [1, -1]$, $\mathbf{x}_2 = [0, 1]$.

- a) Pokazać, że dowolny wektor $\mathbf{x} \in R^2$ jest kombinacją liniową wektorów \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 .
 b) Uzasadnić, że $\{\mathbf{x} \in R^2 : \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2, \alpha, \beta \in R\} = R^2$.
 c) Czy wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, oraz $\mathbf{x} \in R^2$ tworzą, przy dowolnie ustalonym wektorze \mathbf{x} układ wektorów liniowo zależnych?

15. . Dane są wektory $\mathbf{x}_1 = [1, -1, 0]$, $\mathbf{x}_2 = [0, 0, 1]$, $\mathbf{x}_3 = [1, 0, 1]$.

a) Pokazać, że dowolny wektor $\mathbf{x} \in R^3$ jest kombinacją liniową wektorów $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ i \mathbf{x}_3 .

b) Uzasadnić, że $\{\mathbf{x} \in R^3 : \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}_1 + \beta\mathbf{x}_2 + \gamma\mathbf{x}_3, \alpha, \beta, \gamma \in R\} = R^3$.

c) Czy wektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}$, gdzie $\mathbf{x} \in R^3$ jest dowolnym wektorem, są liniowo niezależne?