WYZNACZNIKI

1. Obliczyć wyznacznik, stosując rozwinięcie Laplace'a względem wybranego wiersza lub kolumny:

a) $\det\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, b) $\det\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, c) $\det\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$.

2. a) Stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciego wiersza, obliczyć wyznaczniki macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \alpha \\ \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) Powtórzyć obliczenia, stosując rozwinięcie Laplace'a względem trzeciej kolumny.

3. Obliczyć wyznaczniki następujących macierzy:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy, sprowadzając je uprzednio do postaci macierzy trójkątnej.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

5. Obliczyć podane wyznaczniki, wykorzystując własności wyznacznika:

a) $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, b) $\det\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

6*. Nie obliczając wyznaczników, znaleźć rozwiązanie podanego równania:

$$\det\begin{bmatrix} 1-x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{bmatrix} = 0.$$

7. Znaleźć dopełnienie algebraiczne elementu $a_{22} = 4$ oraz $a_{13} = 5$ macierzy **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

8. Obliczyć wyznacznik macierzy **A** metodą Sarrusa. Znaleźć macierz dopełnień, a następnie obliczyć jej wyznacznik, wykorzystując wzór na macierz odwrotną oraz odpowiednie własności wyznaczników:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

9. Pokazać, że det**AB** = det**A** det**B**, jeśli:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

10. Wyznaczyć macierz dopełnień algebraicznych dla podanych macierzy:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 11\\ 4 & 9\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}.$$

11. Wyznaczyć macierz odwrotną do macierzy **A** za pomocą dopełnień algebraicznych:

a) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}$, c) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 7\\ 6 & 3 & 4\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}$, d) $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 5 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$.

12. Rozwiązać równanie z niewiadomą *x*.

a) $\det\begin{bmatrix}(x-1) & 2x\\ (2-x) & -3\end{bmatrix}=0,$ b) $\det\begin{bmatrix}x & (x+1)\\ (x-1) & (x+2)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}6 & 5\\ -2 & -1\end{bmatrix},$

c) $\det\begin{bmatrix}x & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2x & -1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}1 & 0 & x-1\\ 2 & -1 & 0\\ x & 0 & 0\end{bmatrix}.$

13. Rozwiązać układy równań metodą Cramera

a) $\begin{cases}x & +7y & =2,\\ 2x & -y & =9,\end{cases}$ b) $\begin{cases}x & -y & +z & =1,\\ -x & +y & +2z & =-1,\\ 2x & -y & +z & =3.\end{cases}$

14. Rozwiązać powyższe układy, wyznaczając z macierzowego równania **AX** = **b** macierz **X**.

15. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases}3x_1 & +2x_2 & +x_3 & =5,\\ -x_1 & +4x_2 & -2x_3 & =8,\\ 2x_1 & +3x_2 & & =7.\end{cases}$$

16. Rozwiązać układ równań w zależności od parametru *k*:

$$\begin{cases}3k & +x_2 & +2x_3 & =1,\\ x_1 & +kx_2 & +3x_3 & =1,\\ x_1 & +x_2 & +4x_3 & =k.\end{cases}$$

17. Dla jakich wartości parametru *p* podany układ równań jest układem Cramera? Rozwiązać ten układ dla znalezionych wartości parametru.

$$\begin{cases}px & +y & +z & =1,\\ x & +y & -z & =p,\\ x & -y & +pz & =1.\end{cases}$$

18. Wyzanczyć macierz **X** z równania macierzowegp $\mathbf{C}=(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{X})^{\mathrm{T}}\mathbf{B}+2\mathbf{B}$, gdzie **A**, **B**, **C** są danymi macierzami nieosobliwymi stopnia 3. Obliczyć det **X**, wiedząc, że det **A** = 2, det **B** = 3, det **C** = 4.

19. Dane są macierze:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & -4\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 3\\ -3 & -5 & 2\end{bmatrix}.$$

a) Wyznaczyć macierz **C** daną wzorem $\mathbf{C}=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}+4\det(\mathbf{I}-\mathbf{B})\mathbf{B}^{-1}$.
b) Wyznaczyć rząd każdej z macierzy: **A**, **B** oraz **I** – **B**.

20. Zbadać, dla jakich wartości parametru k macierz $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 1 & -1 & k \end{bmatrix}$ jest odwracalna. Dla znalezionych wartości k wyznaczyć macierz $\mathbf{X}$ spełniającą równanie $\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

21. Dane są macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & -10 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz macierz $\mathbf{C}$ stopnia 3 taka, że $\det \mathbf{C} = 1$. Obliczyć $\det(3\mathbf{B}^{-1}\mathbf{C}^{T}\mathbf{A})$.