Zadania nr 4 do MATEMATYKI 75 Zastosowanie pochodnej funkcji jednej zmiennej

Zadanie 1. Obliczyć granice następujących funkcji stosując w każdym przypadku dwie metody (jedna z nich to wykorzystanie reguły de L'Hospitala)

1.1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^4-2x^2-17}{8-12x^3-x^4}$ **1.2.** $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Zadanie 2. Korzystając z reguły de L'Hospitala, obliczyć granice funkcji:

2.1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$ 2.6. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

2.2. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{\ln x}$ 2.7. $\lim_{x\to+\infty}(x^2-\ln x)$

2.3. $\lim_{x\to 0} x\ln x$ 2.8. $\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x}$

2.4. $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x+1}$ 2.9. $\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

1.5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$ 2.10. $\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^2(\sin x)^2}$

Zadanie 3 Wyznaczyć (o ile istnieją) asymptoty ukośne wykresów funkcji w +∞ lub -∞

3.1 $f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{5x-2}$ 3.2 $f(x)=\frac{2x\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x+1}}$

3.3 $f(x)=x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ 3.4 $f(x)=x\ln(\frac{1}{x}+e)$

Wskazówka: *Asymptotą ukośną wykresu funkcji $f(x)$ nazywamy prostą y= ax+b, gdzie $a=lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ oraz $b=lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)$. Asymptota ta istnieje tylko wówczas, gdy obie granice a i b istnieją i są skończone.*

Zadanie 4 Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji

4.1. $f(x)=\frac{x}{lnx}$ 4.2. $f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$ 4.3. $f(x)=x^2lnx$

Zadanie 5. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji

5.1. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+7$ 5.2. $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-10x+12$

5.3. $f(x)=\frac{x-1}{x\sqrt{x}}$ 5.4 $f(x)=(x^2-5)\cdot e^{x^2}$

5.5. $f(x)=|x|\cdot e^{-x^2}$ 5.6. $f(x)=\ln(1-x^2)$

Zadanie 6. Zbadać monotoniczność i wyznaczyć ekstrema lokalne

6.1.$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}3-x^2+2$ 6.2. $f(x)=\frac{lnx}{\sqrt{x}}$ 6.3. $f(x)=\frac{1}{lnx}+lnx$

6.4. $f(x)=|x+3|-1$ 6.5. $f(x)=e^{\frac{1}{1-x^2}}$ 6.6. $f(x)=x^2lnx$

Zadanie 7 Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji na przedziale:

7.1. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}3 - x^2 + 2 \qquad x \in \langle -4, 1 \rangle$

7.2. $f(x) = (x^2 - 3)e^{|x|} \qquad x \in \langle -4, \sqrt{3} \rangle$

7.3. $f(x) = |x - 5|e^{\frac{1}{x}} \qquad x \in \langle \frac{1}{2}, 10 \rangle$

Zadanie 8.

Zależność popytu p na dobra konsumpcyjne od wielkości dochodu konsumenta x (x>0) wyraża się wzorem:

a) $p(x) = \frac{3}{x}e^{-\frac{1}{x}}$

b) $p(x) = \frac{3}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$

c) $p(x) = \frac{3}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}$

W każdym przypadku należy ustalić poziom dochodu konsumenta, przy którym popyt jest największy.

Zadanie 9

Cena zbytu pewnego wyrobu (*w zł* za jednostkę tego wyrobu) jest określona następującym wzorem

$$p(x) = 0{,}2x^3 + 12x^2 + \frac{5}{x},$$

gdzie x oznacza wielkość produkcji tego wyrobu. Koszt całkowity produkcji w zależności od jej wielkości wynosi

$$K(x) = -0{,}05x^4 + 4x^2 \ .$$

a) Wyznaczyć produkcję, przy której przedsiębiorstwo uzyskuje największy zysk.

b) Wyznaczyć maksymalną i minimalną wielkość produkcji, przy której przedsiębiorstwo nie wykazuje strat.

Zadanie 10

Niech K(x) oznacza koszt całkowity wyprodukowania x jednostek pewnego dobra.

$$K(x) = x^3 - 40x^2 + 490x$$

a) Wyznaczyć dla tego dobra poziom produkcji, przy którym koszt przeciętny jest najniższy

b) Określić funkcję kosztów krańcowych.

Zadanie 11

Wyznaczyć cenową elastyczność popytu dla cen $p_{01} = 10 \ i \ p_{02} = 100$, jeżeli zależność popytu od ceny towaru p wyraza się wzorem

$$f(p) = \frac{1}{p} + p.$$

Podać interpretację uzyskanego wyniku.

Zadanie 12

Wyznaczyć elastyczność funkcji utargu w punkcie $x_0 = 10$, jeśli cena zbytu towaru wynosi $p(x) = 0{,}1x^2 - 0{,}5x + 20$, gdzie x jest wielkością produkcji.

(J. Nowakowski z zespołem)