

# Prognozowanie cen artykułów rolnych na przykładzie cen skupu pszenicy i trzody chlewnej.

Marcin Pawlik

23 maja 2005

## Spis treści

<b>1</b>	<b>Wprowadzenie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Analiza danych</b>	<b>2</b>
2.1	Ceny skupu pszenicy . . . . .	2
2.2	Ceny skupu trzody chlewnej . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Metody prognozowania</b>	<b>5</b>
3.1	Modele adaptacyjne . . . . .	5
3.1.1	Metody naiwne . . . . .	5
3.1.2	Wyrównywanie wykładnicze - metoda Holta . . . . .	12
3.2	ARMA . . . . .	16
3.3	Analiza harmoniczna . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Analiza prognoz</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>Zakończenie</b>	<b>26</b>

# 1 Wprowadzenie

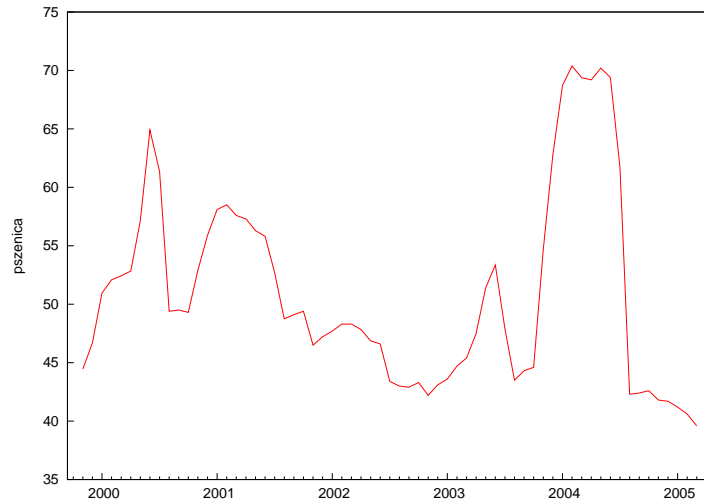
W mojej pracy staram się dokonać prognozy cen podstawowych artykułów produkcji rolnej. Wybrałem te, które moim zdaniem są najistotniejsze - ceny w skupie pszenicy i trzody chlewnej. Wybór tych akurat wielkości jest efektem mojego przekonania o znaczeniu rolnictwa w gospodarce Polski (udział zatrudnionych w rolnictwie).

Do obliczeń wykorzystuję program Gretl.

## 2 Analiza danych

Dane, które wykorzystuję do prognozowania cen, były sukcesywnie publikowane na łamach "Biuletynu informacyjnego" wydawanego przez Agencję Rynku Rolnego. Część z nich zaczerpnąłem również z opracowań dostępnych na stronie internetowej GUS (<http://www.stat.gov.pl/>). Szeregi czasowe obejmują okres od listopada 1999 r. do marca 2005 r.

### 2.1 Ceny skupu pszenicy

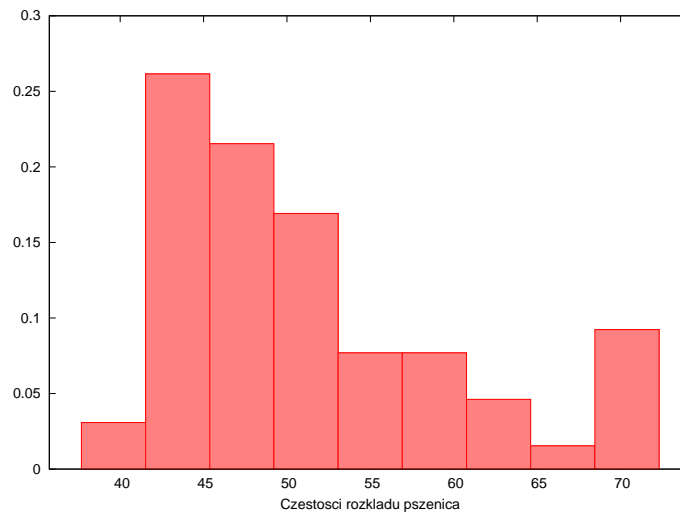


Rysunek 1: Ceny skupu pszenicy w skupie - XI '99 - III '05 (zł/q)

zmienna	wh_p
liczba obserwacji	65
średnia	51,008
mediana	48,75
minimalna	39,6
maksymalna	70,38
odchylenie standardowe	8,42

Przedziały	Punkt środkowy	Liczebność cząstkowa
< 41,5238	39,6000	2 *
41,5238 - 45,3712	43,4475	17 *****
45,3712 - 49,2187	47,2950	14 *****
49,2187 - 53,0662	51,1425	11 *****
53,0662 - 56,9137	54,9900	5 **
56,9137 - 60,7612	58,8375	5 **
60,7612 - 64,6087	62,6850	3
64,6087 - 68,4562	66,5325	1
≥ 68,4562	70,3800	6 ***

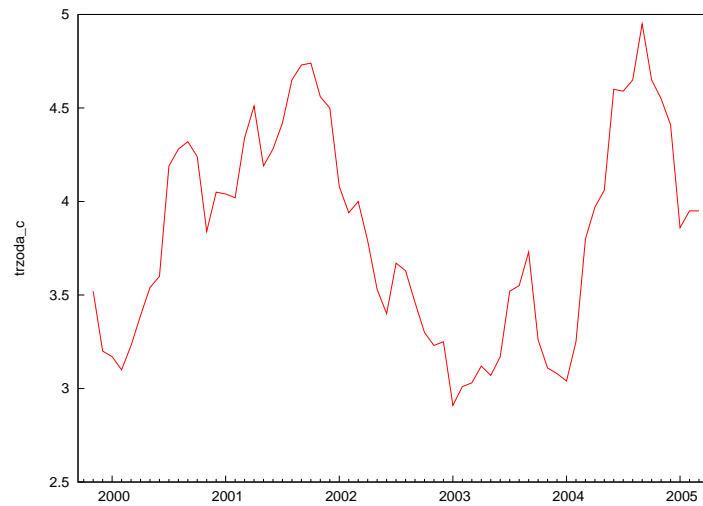
Hipoteza zerowa: dystrybuanta empiryczna posiada rozkład normalny: Chi-  
kwadrat(2) = 21,652 z p-value 0,00002



Rysunek 2: Wykres częstości rozkładu cen pszenicy.

## 2.2 Ceny skupu trzody chlewnej

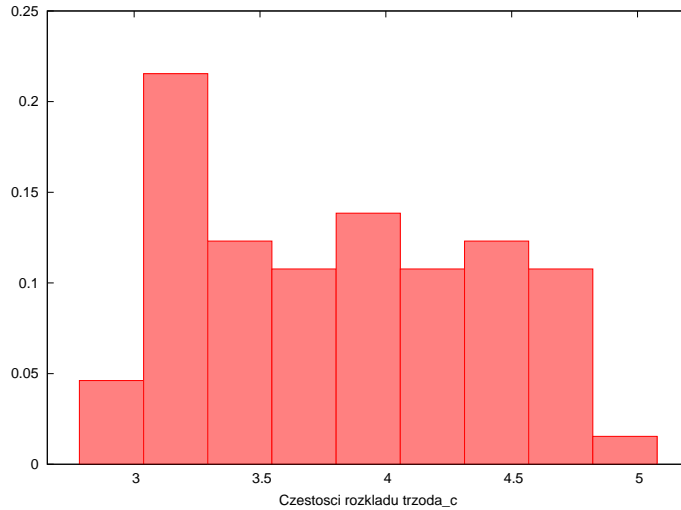
zmienna	p_p
liczba obserwacji	65
średnia	3,8272
mediana	3,84
minimalna	2,91
maksymalna	4,95
odchylenie standardowe	0,5622



Rysunek 3: Ceny trzody chlewnej w skupie - XI '99 - III '05 (zł/kg)

Przedziały	Punkt środkowy	Liczebność cząstkowa
< 3,0375	2,910	3 *
3,0375 - 3,2925	3,165	14 *****
3,2925 - 3,5475	3,420	8 ****
3,5475 - 3,8025	3,675	7 ***
3,8025 - 4,0575	3,930	9 ****
4,0575 - 4,3125	4,185	7 ***
4,3125 - 4,5675	4,440	8 ****
4,5675 - 4,8225	4,695	7 ***
≥ 4,8225	4,95	1

Hipoteza zerowa: dystrybuanta empiryczna posiada rozkład normalny: Chi-kwadrat(2) = 21,652 z p-value 0,00002



Rysunek 4: Wykres częstości rozkładu cen trzody chlewnej.

### 3 Metody prognozowania

#### 3.1 Modele adaptacyjne

##### 3.1.1 Metody naiwne

Metody prognoz naiwnych zalicza się do najprostszych spośród metod adaptacyjnych. Stosowane są w prognozach krótkookresowych - na jeden okres na przód ( $T = n + 1$ ).

W mojej pracy wykorzystuję metodę opartą na błędzeniu losowym:

$$y_T^P = y_n, \quad (1)$$

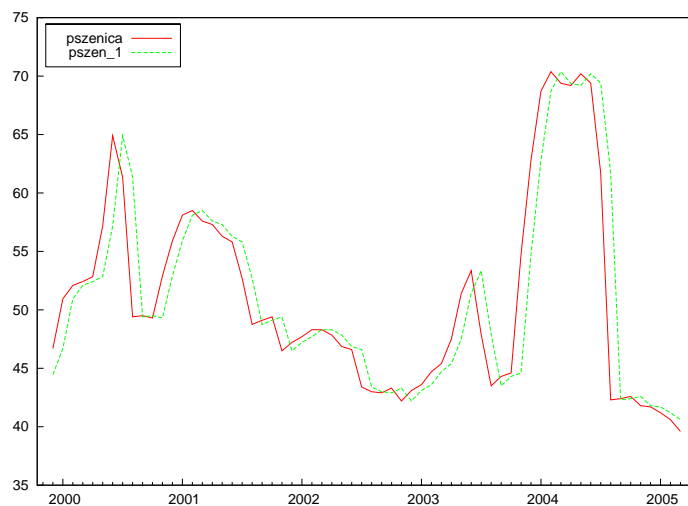
metodę dla szeregu czasowego z trendem:

$$y_T^P = y_n + (y_n - y_{n-1}), \quad (2)$$

oraz metodę dla szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi:

$$y_T^P = y_{n+1-m} \quad \text{gdzie: } m - \text{liczba faz w cyklu} \quad (3)$$

## Błądzenie losowe - wyniki dla cen skupu pszenicy



Rysunek 5: Ceny pszenicy XI '99 - III '05 oraz wartości naiwnych prognoz opartych na błędzeniu losowym.



Rysunek 6: Różnice między empirycznymi wartościami zmiennej modelowanej i wartościami prognoz.

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu naiwnego opartego na błędzeniu losowym.

ME	0,0757813
MPE	0,49%
MAE	2,32359
MSE	16,5264
RMSE	4,06526

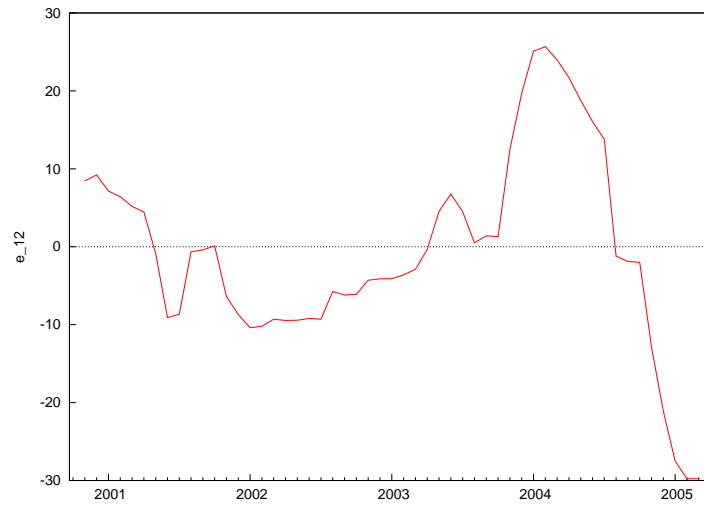
#### Wahania sezonowe - wyniki dla cen skupu pszenicy

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.

ME	0,450159
MPE	3,66%
MAE	7,98222
MSE	132,121
RMSE	11,4944



Rysunek 7: Ceny pszenicy XI '99 - III '05 oraz wartości naiwnych prognoz szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.



Rysunek 8: Różnice wartości empirycznych zmiennej modelowanej i wartości naiwnych prognoz szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.

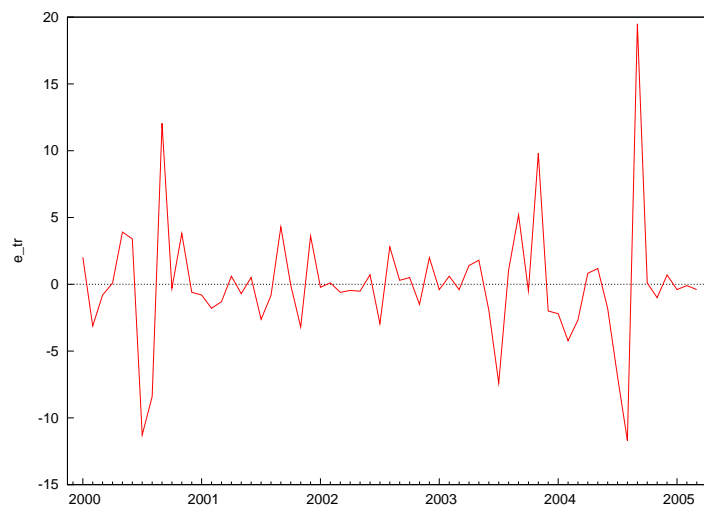
#### Model z trendem - wyniki dla cen skupu pszenicy



Rysunek 9: Ceny pszenicy XI '99 - III '05 oraz wartości naiwnych prognoz opartych na szeregu czasowym z trendem.

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu szeregu czasowego z trendem.

ME	0,0514286
MPE	-0,11%
MAE	2,68222
MSE	20,2273
RMSE	4,49747

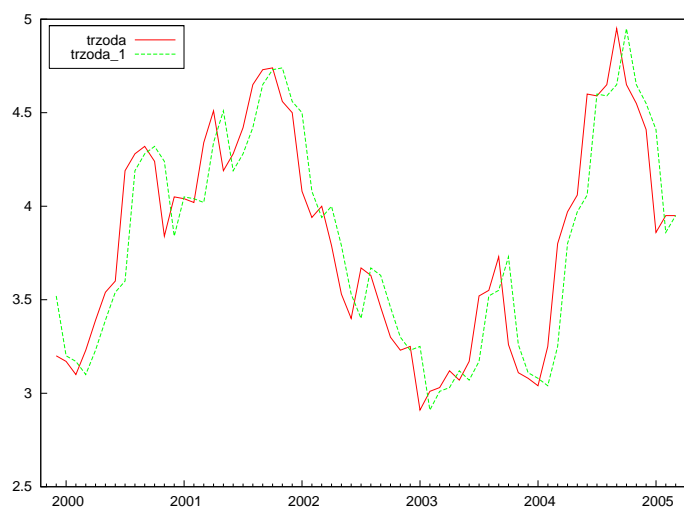


Rysunek 10: Różnice wartości empirycznych zmiennej modelowanej i wartości naiwnych prognoz szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.

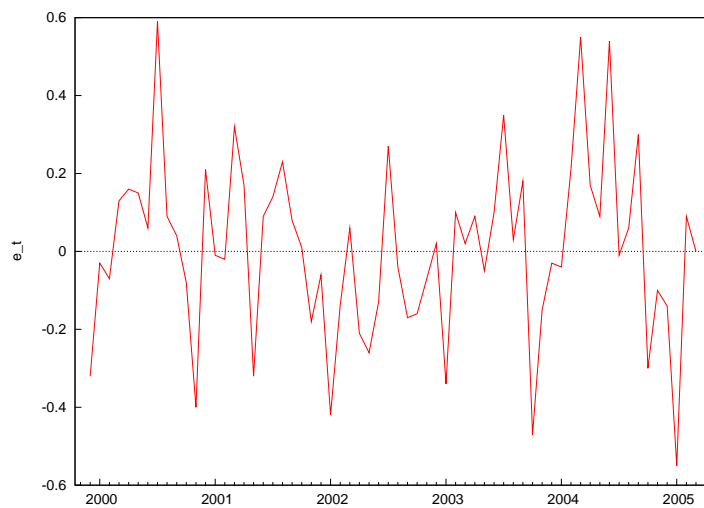
#### **Błądzenie losowe - wyniki dla cen skupu trzody chlewnej**

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu naiwnego opartego na błądzeniu losowym.

ME	-0,00671875
MPE	-3,2e-005%
MAE	0,171406
MSE	0,0517547
RMSE	0,227497

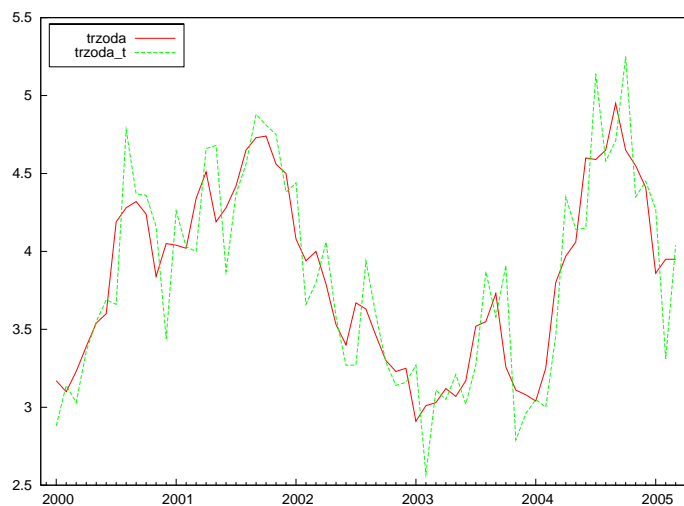


Rysunek 11: Ceny skupu trzody chlewnej XI '99 - III '05 oraz wartości naiwnych prognoz opartych na błędzeniu losowym.

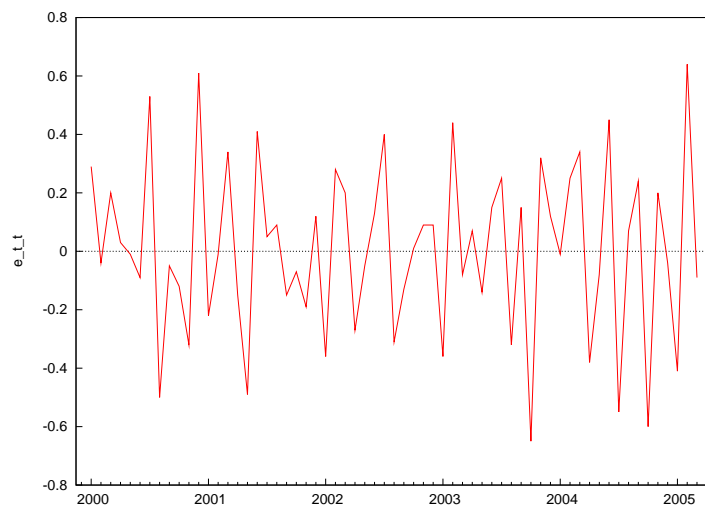


Rysunek 12: Różnice między empirycznymi wartościami zmiennej modelowanej i wartościami prognoz.

### Model z trendem - wyniki dla cen skupu trzody chlewnej



Rysunek 13: Ceny skupu trzody chlewnej XI '99 - III '05 oraz wartości naiwnych prognoz opartych na szeregu czasowym z trendem.

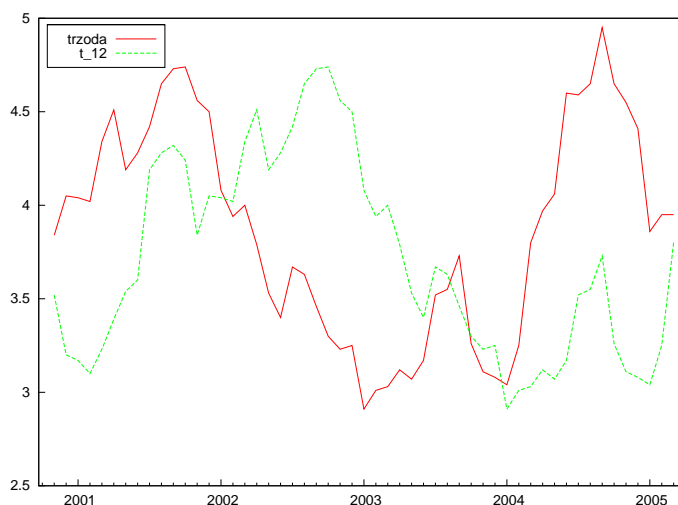


Rysunek 14: Różnice wartości empirycznych zmiennej modelowanej i wartości naiwnych prognoz szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu szeregu czasowego z trendem.

ME	-0,00507937
MPE	-0,0022%
MAE	0,234921
MSE	0,0866222
RMSE	0,294317

### Wahania sezonowe - wyniki dla cen skupu trzody chlewnej



Rysunek 15: Ceny skupu trzody chlewnej XI '99 - III '05 oraz wartości naiwnych prognoz szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.

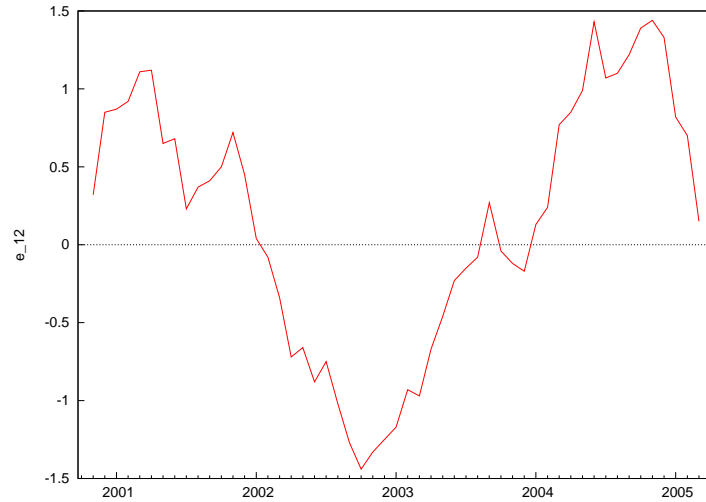
Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.

ME	-0,158679
MPE	-0,0170279%
MAE	0,714528
MSE	0,695353
RMSE	0,833878

### 3.1.2 Wyrównywanie wykładnicze - metoda Holta

Metodę Holta dla szeregu czasowego bez wahań sezonowych zapisuje się w sposób następujący:

$$\begin{cases} \hat{y}_1 = y_1, \\ \hat{y}_t = \alpha y_t + (1 - \alpha) (\hat{y}_{t-1} + c_{t-1}), \quad \text{dla } t > 1, \end{cases} \quad (4)$$



Rysunek 16: Różnice wartości empirycznych zmiennej modelowanej i wartości naiwnych prognoz szeregu czasowego z wahaniami sezonowymi.

przy czym:

$$\begin{cases} c_1 = y_2 - y_1, \\ c_t = \beta(\hat{y}_t - \hat{y}_{t-1}) + (1 - \beta)c_{t-1}, \quad \text{dla } t > 1, \end{cases} \quad (5)$$

gdzie:  $\hat{y}$  - wartość wygładzona w okresie  $t$ ;  $\alpha$  - stała wygładzania ( $\alpha \in (0; 1)$ ) oraz  $\beta \in (0, 1]$ .

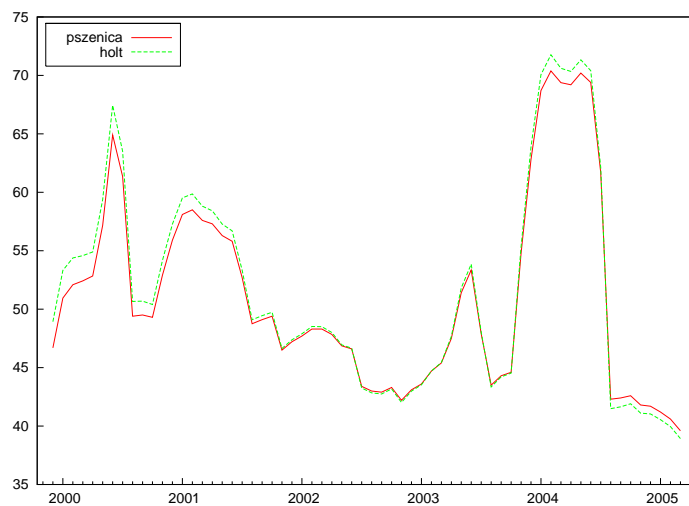
Prognozę obliczamy zgodnie ze wzorem:

$$y_T^P = \hat{y}_n + hc_n \quad (6)$$

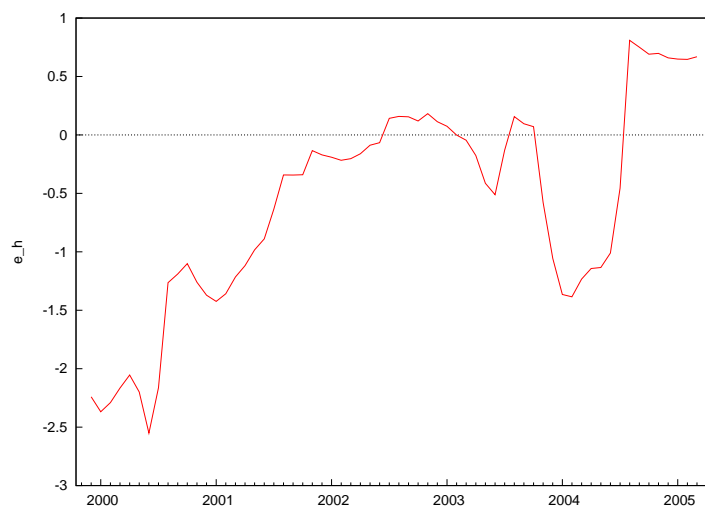
### Model Holta - wyniki dla cen skupu pszenicy

Wartości parametrów w modelu Holta:

parametr	wartość
$\alpha$	1,00
$\beta$	0,064



Rysunek 17: Ceny skupu pszenicy XI '99 - III '05 oraz wartości prognoz opartych na metodzie Holta.



Rysunek 18: Odchylenia wartości empirycznych zmiennej modelowanej od wartości uzyskanych przy pomocy metody Holta.

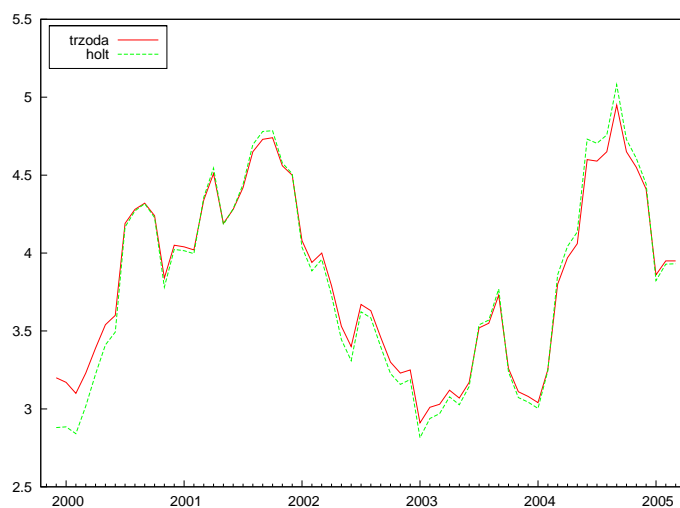
Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu Holta.

ME	0,5922
MPE	0,99%
MAE	0,8059
MSE	1,14
RMSE	1,0677

### Model Holta - wyniki dla cen skupu trzody chlewnej

Wartości parametrów w modelu Holta:

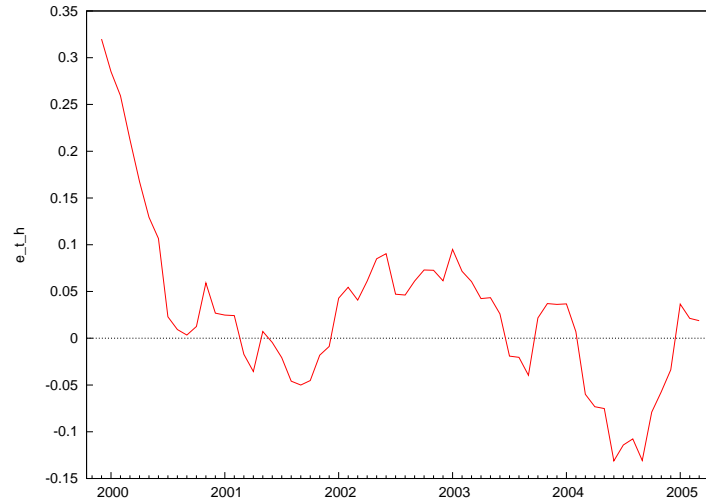
parametr	wartość
$\alpha$	1,00
$\beta$	0,12



Rysunek 19: Ceny skupu trzody chlewnej XI '99 - III '05 oraz wartości prognoz opartych na metodzie Holta.

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu Holta.

ME	-0,0277
MPE	-0,01%
MAE	0,0648
MSE	0,0083
RMSE	0,0911



Rysunek 20: Odchylenia wartości empirycznych zmiennej modelowanej od wartości uzyskanych przy pomocy metody Holta.

### 3.2 ARMA

W modelowaniu i prognozowaniu szeregów czasowych często wykorzystuje się tzw. proces autoregresji — AR(p). Jego uogólnieniem jest proces autoregresji i średniej ruchomej — ARMA(p,q):

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^q \varepsilon_{t-j}. \quad (7)$$

#### Model ARMA(p,q) — wyniki estymacji dla cen skupu pszenicy

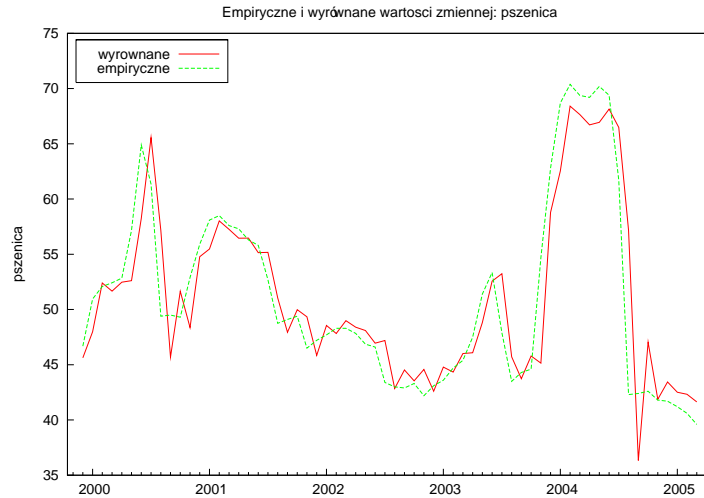
Szereg wykonanych estymacji pokazał, że najlepszym przybliżeniem procesu kształtowania się cen pszenicy okazał się najprostszy z procesów klasy ARMA - ARMA(1,1). Poniżej zamieszczone są wyniki oszacowania modelu autoregresji ze średnią ruchomą ARMA(1,1).

Model: Estymacja ARMA(1,1) z wykorzystaniem 64 obserwacji 1999:12–2005:03

Zmienna zależna: wh\_p

Zmienna	Współczynnik	Std. Error	statystyka t	p-value
const	9,61278	4,55849	2,1088	0,0390
wh_p <sub>t-1</sub>	0,810270	0,0817426	9,9125	0,0000
ε <sub>t-1</sub>	0,507614	0,0947758	5,3560	0,0000

Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej	51,1108
Odch. stand. zm. zależnej	8,45150
średnia dla reszt	0,00459630
Suma kwadratów reszt	783,539
Błąd standardowy reszt ( $\hat{\sigma}$ )	3,55496
Nieskorygowany $R^2$	0,825878
Skorygowany $\bar{R}^2$	0,823070
$F(2, 62)$	147,037



Rysunek 21: Ceny pszenicy XI '99 - III '05 oraz wartości wyrównane ARMA(1,1).

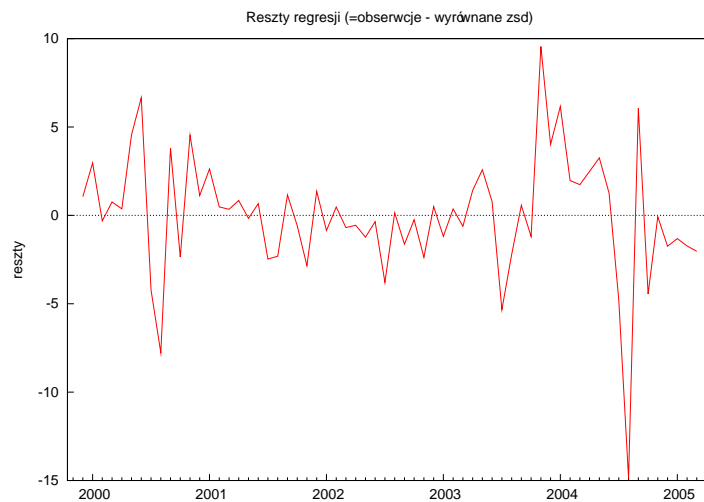
Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu ARMA(1,1).

ME	0,00482235
MPE	-0,46%
MAE	2,50753
MSE	12,8449
RMSE	3,58398

### Model ARMA(p,q) — wyniki estymacji dla cen skupu trzody chlewnej

Kilka oszacowań modeli klasy ARMA(p,q) pokazało, że najlepiej proces kształtowania się cen pszenicy jest przybliżany przez model AR(1). Poniżej zamieszczone są wyniki oszacowania modelu autoregresji AR(1).

Model 3: Estymacja ARMA z wykorzystaniem 64 obserwacji 1999:12–2005:03



Rysunek 22: Odchylenia wartości empirycznych zmiennej modelowanej od wartości uzyskanych z modelu ARMA(1,1).

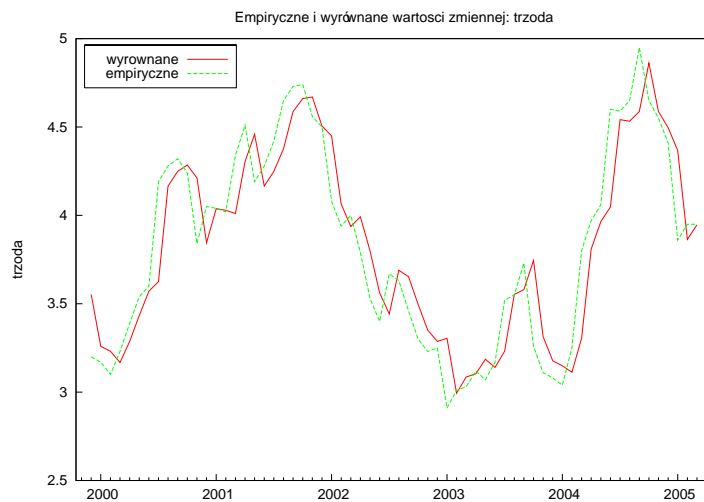
Zmienna zależna: p\_p

Zmienna	Współczynnik	Std. Error	statystyka t	p-value
const	0,327469	0,227368	1,4403	0,1547
p_p <sub>t-1</sub>	0,916150	0,0581328	15,7596	0,0000

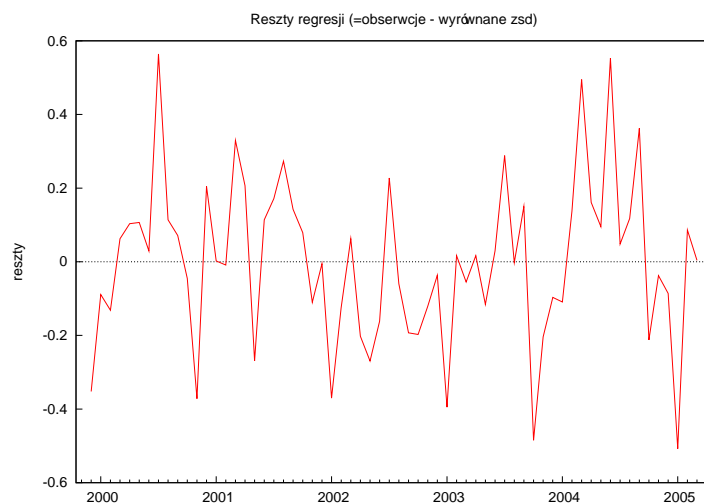
Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej	3,83203
Odch. stand. zm. zależnej	0,565321
średnia dla reszt	0,000000
Suma kwadratów reszt	3,16729
Błąd standardowy reszt ( $\hat{\sigma}$ )	0,224220
Nieskorygowany $R^2$	0,842690
Skorygowany $\bar{R}^2$	0,842690
Stopnie swobody	63

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu AR(1).

ME	-3,0748e-016
MPE	-0,0035%
MAE	0,1696
MSE	0,0495
RMSE	0,2225



Rysunek 23: Ceny skupu trzody chlewnej XI '99 - III '05 oraz wartości wyrównane AR(1).



Rysunek 24: Odchylenia wartości empirycznych zmiennej modelowanej od wartości uzyskanych z modelu AR(1).

### 3.3 Analiza harmoniczna

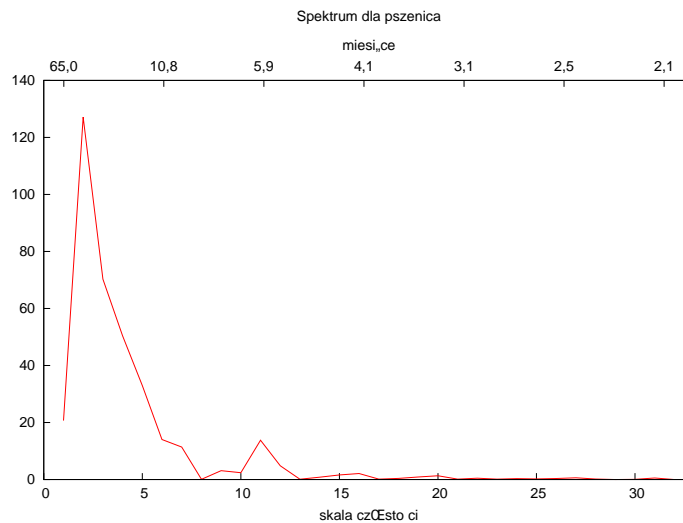
Do prognozowania szeregów czasowych można wykorzystać także wywodzącą się z analizy sygnałów analizę harmoniczną. Metoda ta sprowadza się do

zbudowaniu modelu w oparciu o tzw. harmoniki, tj. funkcje sinus i cosinus o okresach różnej długości. Liczba harmonik przy  $n$  obserwacjach jest równa  $\frac{n}{2}$ . Przy tym  $i$ -ta harmonika ma okres równy  $n/i$ . Model ten zapisuje się równaniem:

$$y_t = f(t) + \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \left[ \alpha_i \sin\left(\frac{2\pi}{n} it\right) + \beta_i \cos\left(\frac{2\pi}{n} it\right) \right], \quad (8)$$

gdzie:  $i$  — numer harmoniki;  $\alpha_i, \beta_i$  — parametry,  $f(t)$  — funkcja trendu. Stosując analizę harmoniczną prognozę oblicza się wykorzystując tylko te harmoniki, których udział w wyjaśnieniu wariacji prognozowanej zmiennej jest największy.

### Analiza harmoniczna — wyniki estymacji dla cen skupu pszenicy



Rysunek 25: Periodogram dla cen pszenicy.

Na podstawie oceny periodogramu dla cen pszenicy (patrz rys. 25) wnioskuje, że największy udział w wyjaśnieniu zmienności modelowanej zmiennej mają harmoniki 1-7 oraz 11. Poniżej zamieszczam wyniki estymacji modelu regresji cen pszenicy względem wyróżnionych harmonik.

Model 1: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 65 obserwacji 1999:11–2005:03

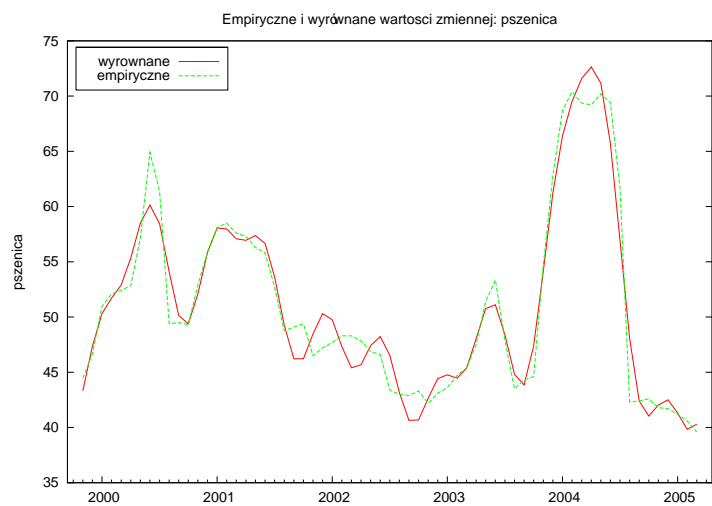
Zmienna zależna: *wh\_p*

Zmienna	Współczynnik	Std. Error	statystyka <i>t</i>	p-value
const	51,0083	0,289968	175,9101	0,0000
hsin_1	-0,0134872	0,410077	-0,0329	0,9739
hcos_1	2,82685	0,410077	6,8935	0,0000
hsin_2	-2,0401	0,410077	-4,9750	0,0000
hcos_2	-6,7083	0,410077	-16,3588	0,0000
hsin_3	2,06921	0,410077	5,0459	0,0000
hcos_3	-4,7852	0,410077	-11,6692	0,0000
hsin_4	4,15632	0,410077	10,1355	0,0000
hcos_4	-1,4931	0,410077	-3,6411	0,0007
hsin_5	3,54832	0,410077	8,6528	0,0000
hcos_5	0,387052	0,410077	0,9439	0,3500
hsin_6	-2,0008	0,410077	-4,8791	0,0000
hcos_6	1,19252	0,410077	2,9080	0,0055
hsin_7	-2,0980	0,410077	-5,1163	0,0000
hcos_7	0,0115312	0,410077	0,0281	0,9777
hsin_11	0,842086	0,410077	2,0535	0,0455
hcos_11	-2,1482	0,410077	-5,2387	0,0000

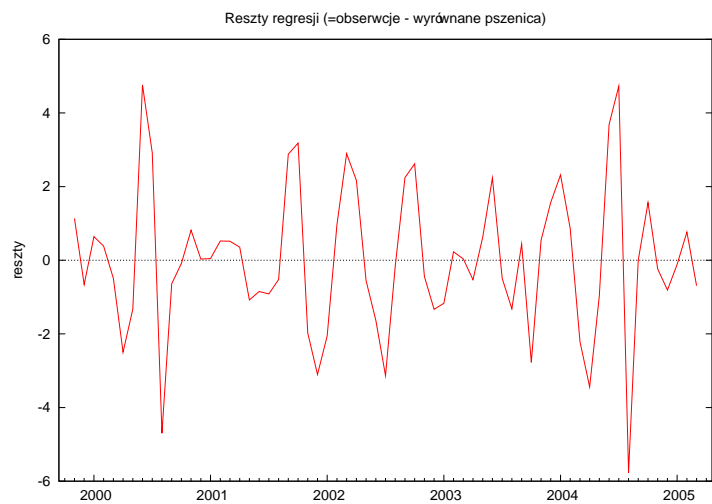
Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej	51,0083
Odch. stand. zm. zależnej	8,42581
Suma kwadratów reszt	262,334
Błąd standardowy reszt ( $\hat{\sigma}$ )	2,33780
Nieskorygowany $R^2$	0,942263
Skorygowany $R^2$	0,923018
$F(16, 48)$	48,9601
Statystyka testu Durbina–Watsona	1,73480

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu.

ME	4,32475e-015
MPE	0,002%
MAE	1,4981
MSE	4,0359
RMSE	2,009

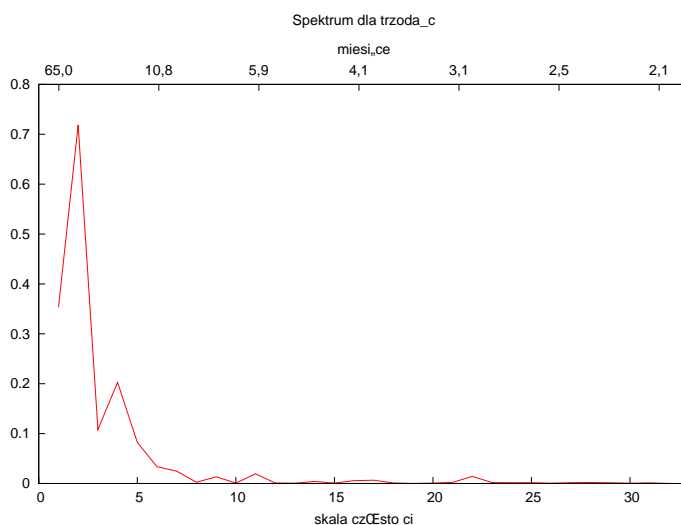


Rysunek 26: Wartości empiryczne zmiennej modelowanej oraz wartości prognozowane zgodnie z założeniami modelu.



Rysunek 27: Różnice między wartościami empirycznymi i prognozowanymi na podstawie modelu.

## Analiza harmoniczna — wyniki estymacji dla cen skupu trzody chlewnej



Rysunek 28: Periodogram dla cen trzody chlewnej.

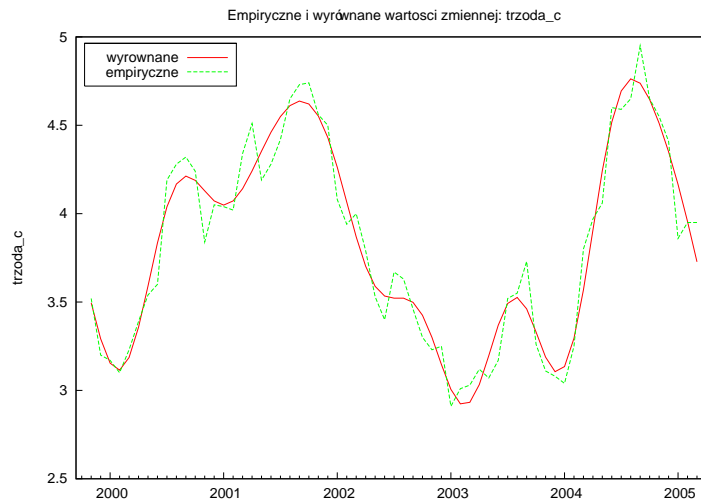
Na podstawie wyników przedstawionych na periodogramie cen trzody chlewnej (patrz rys. 28) wnioskuję, że największy udział w wyjaśnieniu zmienności modelowanej zmiennej mają harmoniki 1-7. Poniżej zamieszczam wyniki estymacji modelu regresji cen pszenicy względem wyróżnionych harmonik.

Model 2: Estymacja KMNK z wykorzystaniem 65 obserwacji 1999:11–2005:03  
Zmienna zależna:  $p_p$

Zmienna	Współczynnik	Std. Error	statystyka $t$	p-value
const	3,82723	0,0182697	209,4848	0,0000
hsin_1	0,343092	0,0258373	13,2789	0,0000
hcos_1	0,137643	0,0258373	5,3273	0,0000
hsin_2	-0,522983	0,0258373	-20,2414	0,0000
hcos_2	-0,0658880	0,0258373	-2,5501	0,0139
hsin_3	-0,203481	0,0258373	-7,8755	0,0000
hcos_3	-0,0202726	0,0258373	-0,7846	0,4364
hsin_4	-0,207620	0,0258373	-8,0357	0,0000
hcos_4	-0,187737	0,0258373	-7,2661	0,0000

Zmienna	Współczynnik	Std. Error	statystyka $t$	p-value
hsin_5	-0,140878	0,0258373	-5,4525	0,0000
hcos_5	-0,109607	0,0258373	-4,2422	0,0001
hsin_6	0,101468	0,0258373	3,9272	0,0003
hcos_6	0,0521666	0,0258373	2,0190	0,0489
hsin_7	-0,0266364	0,0258373	-1,0309	0,3075
hcos_7	0,0938950	0,0258373	3,6341	0,0007

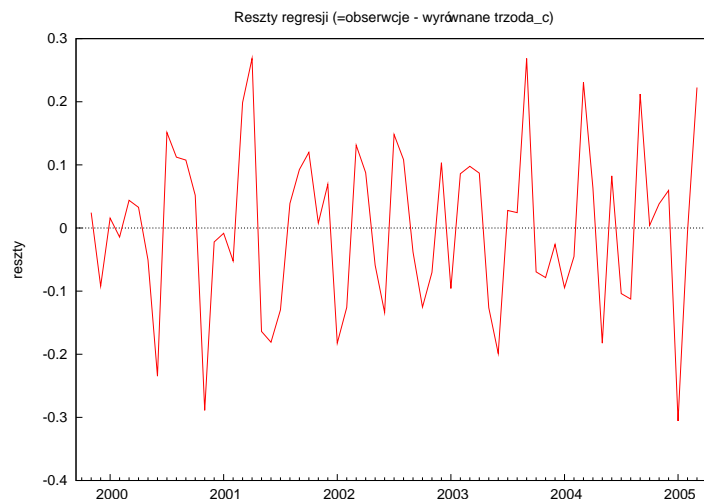
Srednia arytmetyczna zmiennej zależnej	3,82723
Odch. stand. zm. zależnej	0,562221
Suma kwadratów reszt	1,08479
Błąd standardowy reszt ( $\hat{\sigma}$ )	0,147295
Nieskorygowany $R^2$	0,946377
Skorygowany $\bar{R}^2$	0,931362
$F(14, 50)$	63,0307
Statystyka testu Durbina–Watsona	1,91603



Rysunek 29: Wartości empiryczne zmiennej modelowanej oraz wartości prognozowane zgodnie z założeniami modelu.

Miary dokładności prognoz *ex ante* dla modelu.

ME	9,34722e-016
MPE	0,0011%
MAE	0,105169
MSE	0,0167
RMSE	0,129186



Rysunek 30: Różnice między wartościami empirycznymi i prognozowanymi na podstawie modelu.

## 4 Analiza prognoz

Prognozy na okres IV-VI 2005 są następujące:

- dla cen skupu pszenicy:

	rok 2005		
	IV	V	VI
Prognozy naiwne:			
błądzenie losowe	39,60	—	—
model z trendem	38,60	—	—
wahania sezonowe	69,20	70,20	69,40
Metoda Holta	38,90	38,30	37,60
ARMA(1,1)	40,67	41,53	42,23
Analiza harmoniczna	43,39	47,41	50,37

- dla cen skupu trzody chlewnej

	rok 2005		
	IV	V	VI
Prognozy naiwne:			
błądzenie losowe	3,95	—	—
model z trendem	3,95	—	—
wahania sezonowe	3,97	4,06	4,60
Metoda Holta	3,93	3,91	3,89
AR(1)	3,95	3,94	3,94
Analiza harmoniczna	3,49	3,28	3,14

Porównanie RMSE<sup>1</sup> pokazuje jednoznacznie, że zarówno w przypadku prognozowania cen skupu pszenicy, jak i trzody chlewnej, najlepsze wyniki oszacowań daje model oparty na wyrównywaniu wykładniczym metodą Holta. Kolejnymi pod względem jakości prognoz są modele zbudowane w oparciu o analizę harmoniczną. Ciekawym jest fakt, że modele autoregresji (ARMA(p,q)) dają prognozy niewiele różniące się (ale mimo wszystko nieco lepsze) od modeli prognozy naiwnych opartych na błędzeniu losowym. Zdecydowanie z tyłu pozostają prognozy naiwne uzyskane w oparciu o założenie występowania wahań sezonowych badanych zmiennych. Wahania sezonowe w badanych szeregach *de facto* nie występowały.

Zaskakującą może się wydawać rozbieżność tendencji, na które wskazują poszczególne metody prognozowania. Mimo niewielkiej różnicy jakościowej<sup>2</sup> modele oparte na metodzie Holta oraz te posilkujące się analizą harmoniczną w przypadku cen skupu pszenicy przewidują przeciwne tendencje rozwojowe cen. W przypadku szeregu cen skupu trzody chlewnej te dwa modele przewidują podobny przebieg kształtowania się cen, jednak skale tego zjawiska są różne.

Modele autoregresji (ARMA(p,q)) są zgodne co do kierunku zmian cen z modelami opartymi na analizie harmonicznnej. Różnicą jest jednak skala przewidywanych zmian. Modele ARMA(p,q) przewidują zmiany bardzo małe w porównaniu z pozostałymi modelami.

## 5 Zakończenie

Wykonane przeze mnie badanie pokazuje jak trudne jest prognozowanie. Chciałoby się powiedzieć za Nielsem Bohrem<sup>3</sup>: "Przewidywanie jest trudne, zwłaszcza przewidywanie przyszłości". Rozpatrywane przeze mnie modele nie dały jednoznacznej odpowiedzi dotyczącej kierunku zmian badanych cen. Potwierdziła się też obiegowa opinia, że nieraz proste modele dają wyniki niegorsze od tych uzyskiwanych na podstawie skomplikowanych metod prognostycznych.

## Literatura

- [1] *Biuletyn informacyjny*, ARR, nr 127-167.
- [2] J. Hamilton: *Time Series Analysis*, Princeton, NJ: Princeton Univ., 1994.
- [3] A. Welfe: *Ekonometria. Metody i ich zastosowanie.*, PWE, Warszawa 2003.
- [4] A. Zeliaś, B. Pawełek, S. Wanat: *Prognozowanie ekonomiczne. Teoria, przykłady, zadania.*, PWN, Warszawa 2003.

---

<sup>1</sup>Uważam, że jest to najlepsza charakterystyka oceny błędów prognozy *ex ante* bowiem, unika wzajemnej redukcji błędów niedoszacowań i przeszacowań, a ponadto w większym stopniu "karze" za duże błędy niż MAE.

<sup>2</sup>Za kryterium przyjmuję tutaj RMSE

<sup>3</sup>Niels Bohr (1885-1962) - duński fizyk, laureat Nagrody Nobla. Jego prace naukowe przyczyniły się do zrozumienia budowy atomu oraz rozwoju mechaniki kwantowej.